MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{se} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:

De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.
b) Calcule o punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Xeometría:

a) Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.
b) Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{e} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:
a) A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.
b) A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
b) Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:
a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

MATEMÁTICAS II

1. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Ao ter unha fila de ceros, **a matriz $\boldsymbol{A}$ non ten inversa**.

$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 2$ e $a_{33} = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A + I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, polo que **a matriz $\boldsymbol{A + I}$ si que ten inversa**.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^{-\mathbf{1}} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{-3/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & m, \\ & & my & + & 3z & = & 1, \\ & & & & (m-2)z & = & 0. \end{array}\right.$$

Discusión:

- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é $z = 0, \quad y = \frac{1}{m}, \quad x = m - 2y.$

- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$,** temos $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0, \\ & & & & 3z & = & 1, \\ & & & & -2z & = & 0. \end{array}\right.$

  O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez.

- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$,** temos $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 2, \\ & & 2y & + & 3z & = & 1, \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$

  O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \qquad y = \frac{1-3\lambda}{2}, \qquad x = 2 - (1-3\lambda) = 1 + 3\lambda\right], \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$
$$= m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,2\}.$$

Discusión:

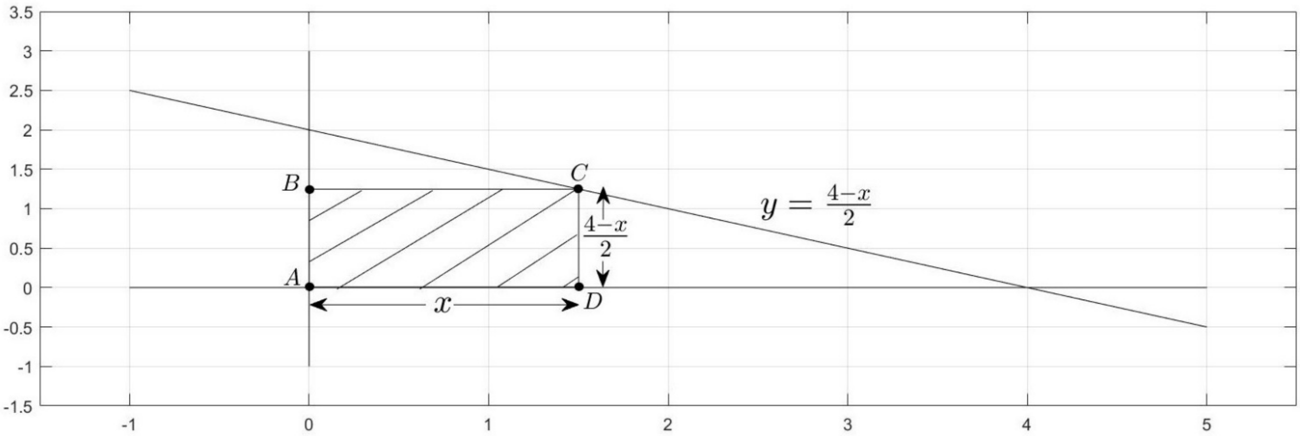
- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.

- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

MATEMÁTICAS II

3.



Corte da recta $x + 2y = 4$ co eixe de abscisas:

$$x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4-x}{2}.$$
$$\frac{4-x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Así pois, hai que achar o máximo de $A(x) = x\left(\frac{4-x}{2}\right)$, $x \in (0,4)$.

$$A(x) = \frac{1}{2}(4x - x^2), \qquad A'(x) = \frac{1}{2}(4 - 2x) = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Hai máximo en $x = 2$ porque $A''(2) = -1 < 0$ (ou porque $y = A(x)$ é a ecuación dunha parábola cóncava con vértice en $x = 2$).

Posto que $\frac{4-2}{2} = 1$, os vértices pedidos son

$$\boldsymbol{A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0).}$$

NOTA: como é frecuente facer, neste exercicio sobreentendemos que o vértice que ten que estar sobre a recta $r: x + 2y = 4$ é o C (ver debuxo, arriba), que vai escorregando sobre r. Certamente, tamén se poderían engadir ao estudo os casos nos que

- é o punto $B(0,2)$, fixo, o que está sobre r, e
- é o punto $D(4,0)$, fixo, o que está sobre r,

e, entón, non hai rectángulo de área máxima. En efecto, consideremos por exemplo o primeiro destes dous casos. Entón, a función pasa a ser $A(x) = 2x$, con $x \in (0,\infty)$ ou, dependendo de interpretacións, $x \in (0,\infty) \setminus \{4\}$. Tanto cun dominio coma co outro, esa función non ten máximo. Esta aproximación ao problema tamén se considerará válida.

MATEMÁTICAS II

4.

$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \qquad y'' = 2 > 0.$$

Logo $y = x^2 - x - 1$ é unha parábola convexa con vértice en $x = \frac{1}{2}$.

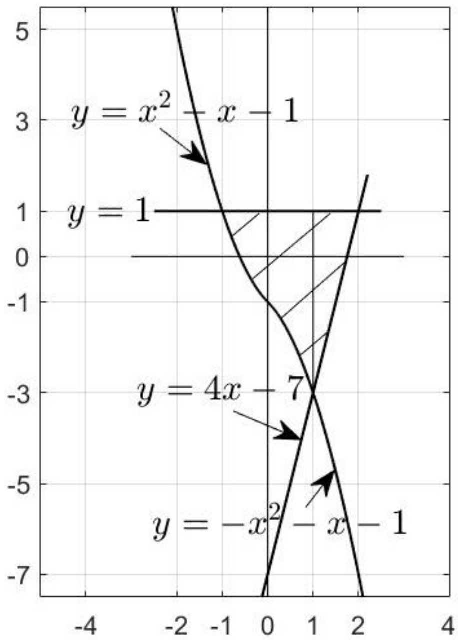
$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \qquad y'' = -2 < 0.$$

Logo $y = -x^2 - x - 1$ é unha parábola cóncava con vértice en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$y = x^2 - x - 1$
0	-1
-1	1
-2	5

x	$y = -x^2 - x - 1$
0	-1
1	-3
2	-7

x	$y = 4x - 7$
0	-7
1	-3
2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- Corte de $y = 1$ con $y = x^2 - x - 1$:
$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1,2\}.$$
Só nos interesa $x = -1$.
- Corte de $y = 1$ con $y = 4x - 7$:
$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$
- Corte de $y = 4x - 7$ con $y = -x^2 - x - 1$:
$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6,1\}.$$
Só nos interesa $x = 1$.

A área pedida é

$$\boldsymbol{A} = \int_{-1}^{0} [1 - (x^2 - x - 1)]\, dx + \int_{0}^{1} [1 - (-x^2 - x - 1)]\, dx + \begin{bmatrix}\text{área dun triángulo} \\ \text{de base 1 e altura 4}\end{bmatrix} =$$

$$\int_{-1}^{0} (-x^2 + x + 2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^2 + x + 2)\, dx + \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 2 = \mathbf{6}.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Plano π que pasa por $A(1{,}0{,}0)$, $B(0{,}2{,}0)$ e $C(0{,}0{,}3)$:

π pasa por $A(1{,}0{,}0)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(-1{,}2{,}0)$ e $\overrightarrow{AC}(-1{,}0{,}3)$. Logo π: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1) + 2z + 3y = 6x + 3y + 2z - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\pi}\mathbf{: 6x + 3y + 2z - 6 = 0.}$$

5.b) Punto simétrico de $P(10,-5{,}5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(10,-5{,}5)$ e é perpendicular a π:
  $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(6{,}3{,}2)$, co cal $r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda, \\ y = -5 + 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases}$
- Corte de r con π:
  $$6(10+6\lambda) + 3(-5+3\lambda) + 2(5+2\lambda) - 6 = 60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6$$
  $$= 49\lambda + 49 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$
  Logo o punto de corte é $Q(10-6,-5-3{,}5-2) = Q(4,-8{,}3)$.
- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x',y',z')$ ao punto,
  $$\frac{10+x'}{2} = 4 \Leftrightarrow 10 + x' = 8 \Leftrightarrow x' = -2,$$
  $$\frac{-5+y'}{2} = -8 \Leftrightarrow -5 + y' = -16 \Leftrightarrow y' = -11,$$
  $$\frac{5+z'}{2} = 3 \Leftrightarrow 5 + z' = 6 \Leftrightarrow z' = 1.$$
  Tense logo $\boldsymbol{P'(-2,-11,1)}$.

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Como $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo a $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{n}_\pi(a, 1,1)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}_r(1,1,1)$:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = -2}.$$

6.b) Posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$.

$$\left[\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3}\right] \Leftrightarrow m = 3.$$

Como non son o mesmo plano cando $m = 3$,

- **Se $\boldsymbol{m = 3}$, son paralelos** (non coincidentes),
- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{3}\}$, son secantes** (córtanse nunha recta).

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 0.8 = 3P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 3P(A) = 0.9 \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A) = 0.3}.$$

7.b) $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

$$0.82 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Como $P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = P(A \cap B)$, **os sucesos A e B son independentes**.

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ "n.º de persoas contaxiadas, de entre as 8".

$X \rightarrow B(n,p)$, con $n = 8$ e $p = 0.1$ (logo $q = 1 - p = 0.9$).

8.a)

$$\boldsymbol{P(X \leq 2)} = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$\binom{8}{0}(0.1)^0(0.9)^8 + \binom{8}{1}(0.1)^1(0.9)^7 + \binom{8}{2}(0.1)^2(0.9)^6 =$$

$$(0.9)^8 + 8(0.1)(0.9)^7 + 28(0.1)^2(0.9)^6 = \mathbf{0.9619}.$$

8.b)

$$\boldsymbol{P(X \geq 2)} = 1 - P(X<2) = 1 - \{P(X=0) + P(X=1)\} = 1 - (0.9)^8 - 8(0.1)(0.9)^7 = \mathbf{0.1869}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:
Despexe X na ecuación matricial $B(X-I)=A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:
a) Enuncie o teorema de Bolzano.
b) Obteña os valores de a, b e c que fan que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpra $f(0)=1$ e teña extremos relativos en $x=\pm 1$. Dicir logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:
a) Enuncie o teorema de Rolle.
b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x)=x+6$ e $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{se} \quad x<0, \\ x^2 & \text{se} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas $\pi: \begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$
b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:
Calcule o punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estatística e Probabilidade:
Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:
a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.
b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:
O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:
Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0, \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas π: $\begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}. \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases}$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:
Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estadística y Probabilidad:
En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

1.

$$B(X-I)=A \Leftrightarrow X-I=B^{-1}A \Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B^{-1}A}.$$

Se $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$,

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X}=I+B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{2}\\\mathbf{-6}&\mathbf{6}&\mathbf{-5}\end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & m & 1 & 1-m \end{array}\right) \overset{F_3-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ my = 1-2m, \\ z = m. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = m, \quad y = \frac{1-2m}{m}, \quad x = \frac{2m-y-z}{m}.$$
- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, o sistema é incompatible**, porque a segunda ecuación queda $0 = 1$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m - 1 = -m$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m - 1 = 1 - m$ non se anulan á vez, é seguro que $\operatorname{rank} A \ge 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + m + m^2 + m - m^2 - m - 2m - m^2 - m = m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

<u>Teorema de Bolzano</u>:
Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

3.b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$, $f(0) = 1$, e f ten extremos relativos en $x = \pm 1$.

- $$f(0) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{c = 1}.$$

- $$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3,$$
$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 3 = 0,$$
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b - 3 = 0.$$

$$\left.\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 1},$$

$$3 + 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 0}.$$

- $$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

$$[f'(-1) = 0, \qquad f''(-1) = -6 < 0] \Rightarrow \textbf{máximo en } \boldsymbol{x = -1},$$

$$[f'(1) = 0, \qquad f''(1) = 6 > 0] \Rightarrow \textbf{mínimo en } \boldsymbol{x = 1}.$$

MATEMÁTICAS II

4.

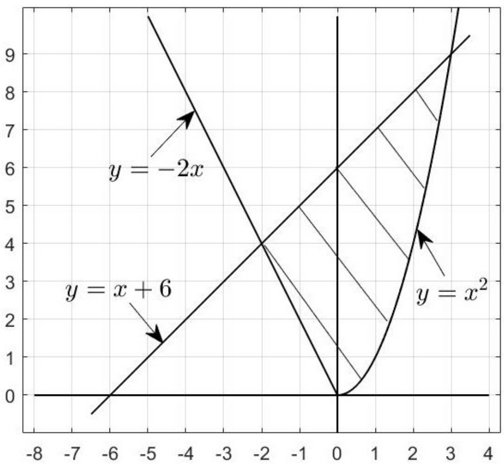
4.a)

Teorema de Rolle:
Se $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

4.b)

- $x^2=x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\Leftrightarrow x\in\{-2,3\}$.
  Só nos interesa $x=3$.

- $-2x=x+6 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$.



$$A=\left[\begin{matrix}\text{área dun triángulo}\\ \text{de base 6 e altura 2}\end{matrix}\right]+\int_0^3 (x+6-x^2)\,dx.$$

$$\int_0^3(-x^2+x+6)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^3=-9+\frac{9}{2}+18=\frac{-18+9+36}{2}=\frac{27}{2}.$$

$$\boldsymbol{A}=6+\frac{27}{2}=\frac{12+27}{2}=\boldsymbol{\frac{39}{2}}=\boldsymbol{19.5}.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuación implícita de π: $\begin{cases} x = 1-\lambda, \\ y = 2+\mu, \\ z = 1+\lambda+2\mu, \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

π pasa por $P(1,2,1)$ e está xerado por $\vec{u}(-1,0,1)$ e $\vec{v}(0,1,2)$. Logo π: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -z+1-x+1+2y-4 = -x+2y-z-2.$$

$$\pi: \boldsymbol{-x+2y-z-2=0}.$$

5.b) Valor de m para que $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$ sexan coplanarios. Ecuación implícita do plano π que os contén.

$\overrightarrow{BC}(1,2,1)$ e $\overrightarrow{BD}(2,-2,0)$ son linealmente independentes, polo que os puntos B, C e D determinan o plano que pasa por B e está xerado por $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Logo π: $\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2y-4-2z+4-4z+8-2x = 2x+2y-6z+8,$$

de onde $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x+y-3z+4=0}$. Finalmente, $A \in \pi \Leftrightarrow m+4=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m=-4}$.

5.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $\overrightarrow{BA}(0,m-2,-2), \overrightarrow{BC}(1,2,1), \overrightarrow{BD}(2,-2,0)$. Ao ser $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ linealmente independentes, a condición para ser coplanarios é $\operatorname{rank} M = 2$, sendo $M = \left(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BD}\right)$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4 = -6 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} M \geq 2 \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0]$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4+2m-4+8 = 2m+8 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m=-4}.$$

Por último, habería que calcular a ecuación que contén aos catro puntos, por exemplo como se fixo arriba.

MATEMÁTICAS II

6. Punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,1,2)$ e é perpendicular a π:

  $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2,-1,1)$, co cal $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- Corte de r con π:

  $$2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 2 + \lambda + 3 = 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 5 + \lambda = 6\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

  Logo o punto de corte é $Q(1 - 2, 1 + 1, 2 - 1) = Q(-1,2,1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

  $$\frac{1 + x'}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 + x' = -2 \Leftrightarrow x' = -3,$$
  $$\frac{1 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 3,$$
  $$\frac{2 + z'}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + z' = 2 \Leftrightarrow z' = 0.$$

  Tense logo $\boldsymbol{P'(-3,3,0)}$.

MATEMÁTICAS II

7. $I =$ "practicar ioga", $M =$ "ter mascota".

$$P(I) = 0.08, \qquad P(M) = 0.20, \qquad P(I \cap M) = 0.03.$$

	M	$\bar{M}$	
I	$100 \cdot 0.03 = 3$		$100 \cdot 0.08 = 8$
$\bar{I}$	17		
	$100 \cdot 0.20 = 20$		100

7.a) Pola táboa de continxencia:

$$\boldsymbol{P(\bar{I} \cap M)} = \frac{17}{100} = \mathbf{0.17}.$$

7.a) <u>**SOLUCIÓN ALTERNATIVA**</u>**:**

$$P(M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow 0.20 = 0.03 + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow \boldsymbol{P(\bar{I} \cap M)} = \mathbf{0.17}.$$

7.b) Pola táboa de continxencia:

$$\boldsymbol{P(M|I)} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}.$$

7.b) <u>**SOLUCIÓN ALTERNATIVA**</u>**:**

$$\boldsymbol{P(M|I)} = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.03}{0.08} = \mathbf{0.375}.$$

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ "grosor en mm dunha prancha de aceiro".

$$X \to N(8{,}0.5) \Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.5} \to N(0{,}1).$$

$$\boldsymbol{P(7.6 \le X \le 8.2)} = P\left(-\frac{0.4}{0.5} \le Z \le \frac{0.2}{0.5}\right) = P(-0.8 \le Z \le 0.4) = P(Z \le 0.4) - P(Z \le -0.8)$$

$$= P(Z \le 0.4) - P(Z \ge 0.8) = P(Z \le 0.4) - \{1 - P(Z \le 0.8)\} = P(Z \le 0.4) + P(Z \le 0.8) - 1 =$$

$$0.6554 + 0.7881 - 1 = \mathbf{0.4435}.$$