CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**ABAU** **Convocatoria ordinaria 2024** **MATEMÁTICAS II**	**CÓDIGO 20**

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números e Álxebra. (2 puntos)

Sexan A e B dúas matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule a matriz X que satisfai a igualdade $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $(A+B)$.

PREGUNTA 2. Números e Álxebra. (2 puntos)

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx & + & (m+2)y & + & z & = & 3, \\ 2mx & + & 3my & + & 2z & = & 5, \\ & & (m-4)y & + & mz & = & m. \end{cases}$

PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)

a) Enuncie os teoremas de Rolle e de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)

Calcule os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

PREGUNTA 5. Xeometría. (2 puntos)

a) Considérese o plano $\pi: 4x + 2y + \mathrm{b}z = 2$ e a recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$, onde b e c son parámetros reais. Calcule os valores que teñen que tomar b e c para que a recta r estea contida en π.

b) Calcule a distancia do punto $P(1,3,1)$ ao plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Xeometría. (2 puntos)

a) Considérense os puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ e $S(0,1,2)$. Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén a Q, R e S.

b) Obteña as ecuacións paramétricas e a ecuación continua da recta que pasa polo punto $P(3,-1,-1)$ e sexa perpendicular ao plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Supostos que A e B son sucesos independentes, calcule $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

b) Supostos que A e B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ e $\bar{B}$ son os sucesos contrarios ou complementarios de A e B, respectivamente).

PREGUNTA 8. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)

Unha máquina que distribúe auga en botellas bota unha cantidade de auga que segue unha distribución normal con media igual a 500 mililitros e desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Se eliximos ao azar unha das botellas, cal é a probabilidade de que leve entre 499 e 502 mililitros?

b) Cal é a cantidade de auga, en mililitros, excedida polo 97,5% destas botellas?

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**ABAU** **Convocatoria ordinaria 2024** **MATEMÁTICAS II**	**CÓDIGO 20**

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx & + & (m+2)y & + & z & = & 3, \\ 2mx & + & 3my & + & 2z & = & 5, \\ & & (m-4)y & + & mz & = & m. \end{cases}$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano $\pi: 4x + 2y + \mathrm{b}z = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

ABAU 2024

CONVOCATORIA ORDINARIA

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   a) **0.75** puntos

   b) **1.25** puntos

2. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   0.5 por resolver $\det A = 0$, **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos

   Nota: Se o resolve por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos

3. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

4. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

5. **Xeometría** (2 puntos)

   a) $\mathbf{1.25}$ puntos

   b) $\mathbf{0.75}$ puntos

6. **Xeometría** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **<u>MÁXIMO DE 5</u>**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números e Álxebra. (2 puntos)
Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, dea resposta aos dous apartados seguintes:
a) Calcule os valores de x e y que fan que A conmute con todas as matrices antisimétricas X de orde 2, é dicir, que fan que se cumpra a igualdade $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orde 2.
b) Se $x = -1$ e $y = 1$, calcule a matriz M que satisfai a igualdade $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números e Álxebra: (2 puntos)
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m, \\ x - y + 2z = 2m, \\ mx + 3z = m. \end{cases}$

PREGUNTA 3. Análise. (2 puntos)

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ pídese responder ás seguintes cuestións:
a) Cal é o valor de k que fai que f sexa continua en $x = 0$ para calquera valor de b?
b) Para que valores de b e k é f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análise. (2 puntos)
Determine o valor do número positivo a que fai que a área da rexión encerrada pola recta $y = -2x$ e a parábola $y = ax^2 + 4x$ sexa igual a 9 unidades cadradas.

PREGUNTA 5. Xeometría. (2 puntos)
Considérense o plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $A(2,1,2)$ e $B(0,1,1)$. Pídese:
a) Estudar a posición relativa da recta r e o plano π.
b) Obter a ecuación implícita ou xeral do plano que contén r e é perpendicular a π.

PREGUNTA 6. Xeometría. (2 puntos)
Sexan r a recta que pasa polos puntos $A(-1,3,-5)$ e $B(1,2,-5)$ e π o plano que pasa polo punto $C(5,0,1)$ e é perpendicular a r. Pídense as ecuacións paramétricas de r, a ecuación implícita ou xeral de π e o punto de corte de r con π.

PREGUNTA 7. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)
Nunha determinada colonia de corvos mariños, cada ovo que se pon ten un 13% de probabilidades de ser infértil. Se se observa a posta de 7 ovos, calcule a probabilidade de que entre eles haxa polo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estatística e Probabilidade. (2 puntos)
A durabilidade dun determinado aparato electrónico segue unha distribución normal de media 20000 horas e desviación típica 2500 horas.
a) Se eliximos ao azar un destes aparatos, cal é a probabilidade de que dure menos de 17000 horas?
b) Cal é a durabilidade, en horas, excedida polo 98,5% destes aparatos?

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, dé respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m, \\ x - y + 2z = 2m, \\ mx + 3z = m. \end{cases}$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

ABAU 2024

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

2. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   0,5 por resolver $\det A = 0$, **0,5** polo estudo dos rangos, **0,5** polo estudo de cada un dos dous casos. Nota: Se o resolve por Gauss, **1** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0,5** polas conclusións de cada un dos dous casos

3. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

4. **Análise** (2 puntos)

   0,5 polo cálculo dos límites de integración, **0,5** por establecer á área, **0,5** polo cálculo da integral, **0,5** polo cálculo de "a"

5. **Xeometría** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

6. **Xeometría** (2 puntos)

   0,5 polas ecuacións paramétricas, **0,5** pola formulación da ecuación xeral do plano, **0,25** por calcular "D", **0,25** por calcular lambda, **0,5** por calcular o punto de corte

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

   0,5 por identificar a binomial, **0,5** pola formulación da probabilidade pedida, **1** punto polo cálculo

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

   a) **1** punto

   b) **1** punto

1. $A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\quad A+B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1.a) $A+2B-(A+B)=B$.

$\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B$.

$(A+B)-B=A$.

$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A$.

$A^2=AA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.b) $A^2X-(A+B)^T=3I-2X$.

$(A^2+2I)X=3I+(A+B)^T$.

$X=(A^2+2I)^{-1}(3I+(A+B)^T)$.

Temos que $(A^2+2I)=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ polo que:

- $\det(A^2+2I)=18$.
- $(A^2+2I)^{-1}=(1/18)\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}^T=(1/18)\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

Por outro lado

- $3I+(A+B)^T=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

Polo tanto, a matriz $\boldsymbol{X}$ pedida é a seguinte:

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{18}\begin{pmatrix}24 & -15\\ -6 & 30\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}8 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}}.$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m & m+1 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ (m-4)y = -1, \\ mz = m+1. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0},\mathbf{4}\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{m+1}{m}, \quad y = -\frac{1}{m-4}, \quad x = \frac{3-z-(m+2)y}{m}.$$
- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, o sistema é incompatible**, porque a terceira ecuación queda $0 = 1$.
- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{4}$, o sistema é incompatible**, porque a segunda ecuación queda $0 = -1$.

<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:

$A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} \mathrm{m} & \mathrm{m}+2 \\ 2\mathrm{m} & 3\mathrm{m} \end{vmatrix} = \mathrm{m}(\mathrm{m}-4)$ e $\begin{vmatrix} 3\mathrm{m} & 2 \\ \mathrm{m}-4 & \mathrm{m} \end{vmatrix} = 3m^2 - 2m + 8$ non se anulan á vez, tense que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 2m^2 - 8m - 2m^2 + 8m - 2m^3 - 4m^2 = m^3 - 4m^2$$
$$= m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,4\}.$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0},\mathbf{4}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20 + 24 = 4 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{4}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 96 - 80 - 32 = 16 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

3.

a)

Teorema de Rolle: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b), e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a).f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b)

Tomando

$u = x^2$	$du = 2xdx,$
$dv = xe^{x^2}dx$	$v = \frac{1}{2}e^{x^2}$

Temos que

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C.$$

4.

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1 + x)}{x \sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{x+1}}{\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos x e^{\sin x}\cos x - e^x}{2} = \frac{0 + 1 - 1}{2} = 0.$$

onde L´H indica o uso da regra de L´Hôpital para tratar indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L´Hôpital é que o primeiro límite existe e vale ½ (ou 0) porque o último existe e vale ½ (ou 0).

5.
a)

Temos o plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ e a recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$.

Para que a recta estea contida no plano, $\vec{n}_\pi(4,2,b)$ o vector normal a π ten que ser perpendicular a $\vec{d}_r = (3,2,4)$, polo tanto tería que cumprirse que $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 0$. De aquí,
$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 12 + 4 + 4b = 0$ polo que $b = -4$.

No caso de que $b = -4$, o plano π e a recta r son paralelos. Para que a recta estea contida no plano, o punto $A(2, c, 3)$ polo que pasa a recta debe pertencer ao plano. Temos entón substituindo na ecuación do plano:

$$\pi: 4x + 2y - 4z = 2$$

$$4 \times 2 + 2 \times c - 4 \times 3 = 2$$

Polo que $c = 3$

b)

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Polo que neste caso, a distancia de $P(1,3,1)$ a $\pi': 4x + 2y - 4z - 2 = 0$ é igual a:

$$d(P,\pi') = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 3 - 4 \times 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3}$$

6.

a)

Dados os puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ e $S(0,1,2)$, π pasa por $Q(-1,3,-5)$ e está xerado por, $\overrightarrow{QR}(4,-2,5)$ e $\overrightarrow{QS}(1,-2,7)$.

Logo π: $\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -14x - 14 - 8z - 40 + 5y - 15 + 2z + 10 + 10x + 10 - 28y + 84 =$$

$$= -4x - 23y - 6z + 35 \Rightarrow \boldsymbol{\pi}: \mathbf{4x + 23y + 6z - 35 = 0}.$$

b)

Recta que pasa polo punto $P(3,-1,-1)$ e perpendicular ao plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

Entón temos que $\vec{d}_r = (4,23,6)$. Entón as ecuacións paramétricas da recta son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda, \\ y = -1 + 23\lambda, \\ z = -1 + 6\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A ecuación continua da recta é:

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$$

7.

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

a)

Supostos que A e B son independentes, temos que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$

$$P(\bar{A}|(\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \mathbf{\frac{4}{5}}.$$

b)

Supostos que A e B son incompatibles, temos que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{5}{6}}.$

$$P(\bar{A}|(\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

8. $X =$ "Cantidade de auga que a máquina distribúe en botellas".

$$X \to N(500{,}4) \Rightarrow Z = \frac{X-500}{4} \to N(0{,}1).$$

a)

$$P(499 < X < 502) = P\left(\frac{499-500}{4} < Z < \frac{502-500}{4}\right) = P(-0{,}25 < Z < 0{,}5)$$
$$= P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}25) \approx 0{,}6915 - 0{,}4013 = \mathbf{0{,}2902.}$$

$$(*)\ P(Z < -0{,}25) = P(Z > 0{,}25) = 1 - P(Z < 0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = 0{,}4013$$

b)

Pídese a tal que $P(X > a) = 0{,}975$.

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = 0{,}975$$

A probabilidade só pode maior que 0,5 se $\frac{a-500}{4} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = P\left(Z < \frac{500-a}{4}\right) = 0{,}975,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{500-a}{4} \approx 1{,}96,$$

$$500 - a \approx 7{,}84$$

e, finalmente,

$$\boldsymbol{a \approx 492{,}16\ \ \text{mililitros}}.$$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

1.a) As matrices antisimétricas de orde 2 son da forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\alpha y & \alpha x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

así que debe cumprirse

$$[-\alpha = \alpha x;\ \alpha = \alpha y;\ -\alpha y = -\alpha; \alpha x = -\alpha]\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\boldsymbol{x = -1}; \boldsymbol{y = 1}].$$

1.b) Se $x = -1$ e $y = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2M = A^{-1} - AM \Leftrightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Leftrightarrow M = (2I + A)^{-1}A^{-1}.$$

- $\det A = 1 + 1 = 2$.
- $A^{-1} = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(2I + A) = 9 + 1 = 10$.
- $(2I + A)^{-1} = (1/10)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = (1/10)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Polo tanto, a matriz pedida é a seguinte:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}} = \boldsymbol{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 2 & 1 & 1 & m \\ m & 0 & 3 & m \end{array}\right) \underset{F_3 - mF_1}{\xrightarrow{F_2 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 3 & -3 & -3m \\ 0 & m & 3-2m & m-2m^2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/3)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & m & 3-2m & m-2m^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 3-m & m-m^2 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2m, \\ y - z = -m, \\ (3-m)z = m - m^2. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{m - m^2}{3 - m}, \quad y = z - m, \quad x = y - 2z + 2m.$$
- **Se $m = 3$, o sistema é incompatible**, porque a terceira ecuación queda $0 = -6$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{array}\right), \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2m + m - 3 = 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 3$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 18 + 9 - 3 = 18 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ \frac{k - x\mathrm{e}^x}{x} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

3.a) Continuidade:

$$f(0) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + bx - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{k - x\mathrm{e}^x}{x} = \begin{cases} -\infty \text{ se } k < 0, \\ -1 \text{ se } k = 0, \\ \infty \text{ se } k > 0. \end{cases}$$

Logo $\boldsymbol{f}$ **é continua en** $\boldsymbol{x = 0}$ **para calquera valor de** $\boldsymbol{b}$ **se, e só se,** $\boldsymbol{k = 0}$.

3.b) Derivabilidade:

É necesario que $k = 0$, co cal $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -\mathrm{e}^x & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

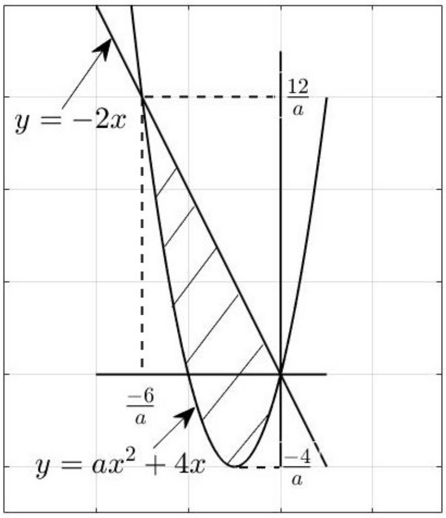
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{se} \quad x < 0, \\ -\mathrm{e}^x & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x + b) = b,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-\mathrm{e}^x) = -1.$$

Logo $\boldsymbol{f}$ **é derivable en** $\boldsymbol{x = 0}$ **se, e só se,** $\boldsymbol{b = -1}$ **e** $\boldsymbol{k = 0}$.

4. $y = ax^2 + 4x$, $[y' = 2ax + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2/a]$, $y'' = 2a > 0$. Parábola convexa con vértice en $x = -2/a$.



Puntos de corte:

$$ax^2 + 4x = -2x \Leftrightarrow ax^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(ax + 6) = 0,$$

de onde $x \in \{-6/a, 0\}$.

Ademais, pola convexidade, a recta está por riba da parábola.

- Tense que cumprir
$$\int_{-6/a}^{0} (-2x - ax^2 - 4x)\, dx = 9,$$
-
$$\int_{-6/a}^{0} (-2x - ax^2 - 4x)\, dx = \int_{-6/a}^{0} (-ax^2 - 6x)\, dx =$$

$$\left[-a\frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-6/a}^{0} = \frac{a}{3}\left(-\frac{6}{a}\right)^3 + 3\left(-\frac{6}{a}\right)^2 = -\frac{72}{a^2} + \frac{108}{a^2} = \frac{36}{a^2}.$$

Por último,
$$\frac{36}{a^2} = 9 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2},$$

xa que $a > 0$.

5. $\pi: x + 2y - 2z = 0$, r recta que pasa por $A(2,1,2)$ e $B(0,1,1)$.

5.a) Posición relativa de r e π:

$\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ vector normal a π; $\vec{d}_r = \overrightarrow{BA}(2,0,1)$ vector director de r.

Como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2 - 2 = 0$, ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (sobreentendendo $r \not\subset \pi$).

Posto que $2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$, $A \in \pi$, polo que $\boldsymbol{r \subset \pi}$.

5.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$[A \in \pi, B \in \pi] \Rightarrow \boldsymbol{r \subset \pi}.$$

5.b) Ecuación implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π:

Se chamamos π^* ao plano pedido, π^* pasa por $A(2,1,2)$ e está xerado por $\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ e por $\vec{d}_r(2,0,1)$. Logo

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) - 4(y-1) - 4(z-2) - (y-1)$$
$$= 2x - 4 - 4y + 4 - 4z + 8 - y + 1 = 2x - 5y - 4z + 9.$$

$$\boldsymbol{\pi^*: 2x - 5y - 4z + 9 = 0.}$$

6.

- A recta r pasa por $A(-1,3,-5)$, e o seu vector director é $\vec{d}_r = \overrightarrow{AB}(2,-1,0)$. Logo

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2\lambda}, \\ \boldsymbol{y = 3 - \lambda}, \\ \boldsymbol{z = -5}, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

- O plano π pasa por $C(5,0,1)$, e o seu vector normal é $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(2,-1,0)$. Logo

$$\boldsymbol{\pi: 2(x-5) - y = 0}$$

ou

$$\boldsymbol{\pi: 2x - y - 10 = 0}.$$

- Punto de corte de r e π:

$$2(-1+2\lambda) - (3-\lambda) - 10 = -2 + 4\lambda - 3 + \lambda - 10 = 5\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Logo o punto de corte é $P(-1+2\cdot 3, 3-3, -5) = \boldsymbol{P(5,0,-5)}$.

7. $X =$ "n.º de ovos infértiles, de entre os 7".

$X \to B(n,p)$, con $n = 7$ e $p = 0.13$ (logo $q = 1 - p = 0.87$).

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

- $P(X = 0) = \binom{7}{0}(0.13)^0(0.87)^7 = (0.87)^7 \approx 0.3773.$

- $P(X = 1) = \binom{7}{1}(0.13)^1(0.87)^6 = 7\,(0.13)\,(0.87)^6 \approx 0.3946.$

$$\boldsymbol{P(X \geq 2)} \approx 1 - \{0.3773 + 0.3946\} = 1 - 0.7719 = \mathbf{0.2281}.$$

8. $X =$ "durabilidade en horas dun aparato".

$$X \to N(20000{,}2500) \Rightarrow Z = \frac{X - 20000}{2500} \to N(0{,}1).$$

8.a)

$$\boldsymbol{P(X < 17000)} = P\left(Z < \frac{-3000}{2500}\right) = P(Z < -1.2) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) \approx$$

$$1 - 0.8849 = \mathbf{0.1151}.$$

8.b) Pídese d tal que $P(X > d) = 0.985$.

$$P(X > d) = P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right)$$

só pode maior que 0.5 se $\frac{d-20000}{2500} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right) = P\left(Z < \frac{20000 - d}{2500}\right) = 0.985,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{20000 - d}{2500} \approx 2.17,$$

$$20000 - d \approx 5425$$

e, finalmente,

$$\boldsymbol{d \approx 14575 \ \ \text{horas}}.$$