GRAVITACIÓN. PROBLEMAS

1. O MESSENGER é unha misión espacial non tripulada da NASA, lanzada rumbo a Mercurio en Agosto de 2004 e que entrou en órbita arredor dese planeta en Marzo de 2011. No seu percorrido enviou datos que permiten coñecer diferentes parámetros sobre Mercurio. Así, en Abril de 2011, atopándose a unha distancia de 10124 km do centro de Mercurio, o período de Messenger foi de 12 horas e 2 minutos. Con estes datos calcula:

a) A velocidade orbital á que se estaría movendo Messenger.
b) A masa de Mercurio.
c) Os valores da enerxía cinética e potencial da sonda espacial nese intre, tendo en conta que a masa da sonda espacial é de 485 kg.

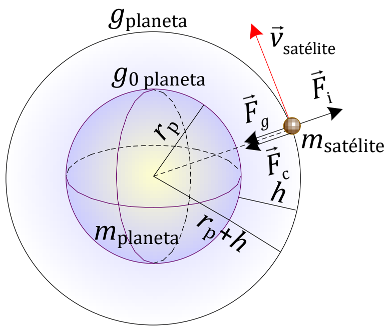
Dato: Constante de Gravitación G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻².

a) Messenger, no seu movemento orbital, posúe un movemento circular uniforme.

$$v=\frac{s}{t} \rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T} \rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}0124\cdot 10^{7}}{12\cdot 3600+2\cdot 60} \rightarrow \boxed{v=1{,}468\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

b) A forza centrípeta necesaria para que Messenger poida describir a órbita é proporcionada pola forza de atracción que Mercurio exerce sobre Messenger: $F_{\text{centrípeta}}=F_{\text{Mercurio-Messenguer}}$.

$$\left.\begin{array}{r} F_{\mathrm{c}}=F_{\mathrm{g}} \rightarrow m\cdot a_{\mathrm{c}}=m\cdot g_{\text{Mercuio}} \\ a_{\mathrm{c}}=\dfrac{v^{2}}{r} \\ g_{\text{Mercuio}}=G\cdot\dfrac{m_{\text{Mercurio}}}{r^{2}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{v^{2}}{r}=G\cdot\frac{m_{\text{Mercurio}}}{r^{2}} \rightarrow m_{\text{Mercurio}}=\frac{v^{2}\cdot r}{G}$$



$$m_{\text{Mercurio}}=\frac{\left(1{,}468\cdot 10^{3}\right)^{2}\cdot 1{,}0124\cdot 10^{7}}{6{,}67\cdot 10^{-11}} \rightarrow \boxed{m_{\text{Mercurio}}=3{,}27\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}$$

c) Cálculo das enerxías cinética e potencial:

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{m\cdot v^{2}}{2} \rightarrow E_{\mathrm{k}}=\frac{485\cdot\left(1{,}468\cdot 10^{3}\right)^{2}}{2} \rightarrow \boxed{E_{\mathrm{k}}=5{,}23\cdot 10^{8}\ \mathrm{J}}$$

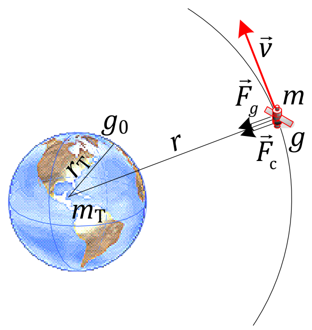
$$E_{\mathrm{p}}=-\frac{G\cdot m_{\text{Mercurio}}\cdot m}{r} \rightarrow E_{\mathrm{p}}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3{,}27\cdot 10^{23}\cdot 485}{1{,}0124\cdot 10^{7}} \rightarrow \boxed{E_{\mathrm{p}}=-1{,}05\cdot 10^{9}\ \mathrm{J}}$$

2. O satélite PLANCK forma parte da primeira misión europea dedicada ao estudo da orixe do Universo. O satélite PLANCK, cunha masa de 1800 kg, foi lanzado en Abril de 2009 para situarse nunha órbita a 1,5 millóns de quilómetros do centro da Terra. Supoñendo que a órbita que describe é circular, calcula:

a) A velocidade orbital do satélite e o tempo, en días, que tardará en dar unha volta entorno á Terra.
b) A enerxía cinética, potencial e mecánica do satélite na órbita.
c) A velocidade con que chegaría á Terra, se por algunha circunstancia o satélite perde a súa velocidade orbital. Considerar desprezable a fricción ao entrar en contacto coa atmosfera.

Datos: $r_T = 6{,}37{\cdot}10^6$ m; : $m_T = 5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg; $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Para determinar a velocidade orbital temos en conta que, para un observador inercial, a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae, $\vec{F}_g$, que é unha forza normal á traxectoria, $\vec{F}_c$: $F_c = F_g$.



$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{1{,}5 \cdot 10^9}} \rightarrow \boxed{v = 516\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

Calculamos o período T do satélite relacionándoo coa súa velocidade v no movemento uniforme que posúe:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^9}{516} \rightarrow T = 1{,}83{\cdot}10^7\ \mathrm{s} \rightarrow \boxed{T = 211{,}8\ \text{días}}$$

b) Cálculo das enerxías cinética, potencial e mecánica:

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \rightarrow E_k = \frac{1800 \cdot 516^2}{2} \rightarrow \boxed{E_k = 2{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{J}}$$

$$E_p = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{r} \rightarrow E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1800}{1{,}5 \cdot 10^9} \rightarrow \boxed{E_p = -4{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{J}}$$

$$E_m = E_k + E_p \rightarrow E_m = 2{,}4 \cdot 10^8 + \left(-4{,}8 \cdot 10^8\right) \rightarrow E_m = \boxed{-2{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{J}}$$

c) Aplicamos o principio de conservación da enerxía, supoñendo que agora a enerxía cinética orbital é nula.

$$\left.\begin{array}{l} \left(E_k + E_p\right)_{\text{órbita}} = \left(E_k + E_p\right)_{\text{Terra}} \\ E_{k\,\text{órbita}} = 0 \\ E_{p\,\text{órbita}} = -4{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{J} \\ E_{k\,\text{Terra}} = \dfrac{m \cdot v^2_{\text{de chegada}}}{2} = \dfrac{1800 \cdot v^2_{\text{de chegada}}}{2} \\ E_{p\,\text{Terra}} = -\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1800}{6{,}37 \cdot 10^6} = -1{,}13 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{v_{\text{de chegada}} = 1{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

3. En 2012, a Universidade de Vigo e o Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, en colaboración coa ESA (Axencia Espacial Europea) puxeron en órbita o primeiro satélite galego, o XATCOBEO, para fins educativos. Este satélite, cunha masa de aproximadamente 1 kg, orbita a unha altura máxima (apoxeo) de 1500 km da superficie terrestre, e a unha mínima (perixeo) de 300 km. Determina:

a) A velocidade media orbital, supoñendo que o raio medio orbital e a semisuma do perixeo e apoxeo.
b) A enerxía mecánica do satélite no apoxeo.
c) Xustifica cómo variará a velocidade areolar no seu percorrido orbital.

Datos: $r_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $m_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

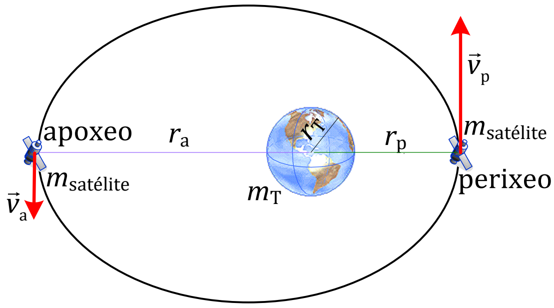
a) Para determinar a velocidade media orbital temos en conta que: $F_c = F_g$

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m_{\text{satélite}}\cdot v^2}{r_{\text{órbita}}} = G\cdot\frac{m_T\cdot m_{\text{satélite}}}{r^2_{\text{órbita}}} \rightarrow v = \sqrt{G\cdot\frac{m_T}{r_{\text{órbita}}}}$$

$$r_{\text{medio órbita}} = \frac{\left(1500\cdot10^3+300\cdot10^3\right)}{2} + 6{,}37\cdot10^6$$

$$r_{\text{medio órbita}} = 7{,}27\cdot10^6\ \text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}27\cdot10^6}} \rightarrow \boxed{v = 7407\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$



b) A enerxía mecánica consérvase, polo que : $E_{\text{mecánica perixeo}} = E_{\text{mecánica apoxeo}}$

$$-G\cdot\frac{m_T\cdot m_{\text{satélite}}}{6{,}37\cdot10^6+300\cdot10^3} + \frac{1}{2}\cdot m_{\text{satélite}}\cdot v_p^2 = -G\cdot\frac{m_T\cdot m_{\text{satélite}}}{6{,}37\cdot10^6+1500\cdot10^3} + \frac{1}{2}\cdot m_{\text{satélite}}\cdot v_a^2$$

Por tratarse dun campo de forzas centrais, tamén se conserva o momento angular: $L_{\text{perixeo}} = L_{\text{apoxeo}}$

$$m_{\text{satélite}}\cdot v_p\cdot r_p = m_{\text{satélite}}\cdot v_a\cdot r_a \rightarrow v_p\cdot\left(6{,}37\cdot10^6+300\cdot10^3\right) = v_a\cdot\left(6{,}37\cdot10^6+1500\cdot10^3\right)$$

Resolvendo o sistema chegamos a: $v_p = 8046\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ e $v_a = 6819\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

E calculando a enerxía mecánica total resulta: $\boxed{E_{\text{mec.}} = -2{,}74\cdot10^7\ \text{J}}$

c) A segunda lei de Kepler dinos que no movemento dun satélite respecto do seu planeta, a área que varre o raio vector do satélite respecto do centro do planeta, chamada velocidade areolar, é constante: $v_{\text{areolar}} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$. Para xustificar a constancia de v_{areolar} temos que ver que o módulo do momento angular $\vec{L}$ é constante.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d\left[\vec{r}\times(m\vec{v})\right]}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\dfrac{d(m\vec{v})}{dt} \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\vec{F}$$

Como o vector $(m\cdot\vec{v})$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v}\times(m\cdot\vec{v}) = \vec{0}$. Por outro lado, como o satélite se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$

teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180º) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$. En consecuencia $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$.

4. Un satélite de masa 200 kg sitúase nunha órbita circular sobre o Ecuador terrestre, de tal forma que se axusta o raio da órbita para que dea unha volta á Terra cada 24 horas. Así conséguese que sempre se atope sobre o mesmo punto respecto da Terra (satélite xeoestacionario).

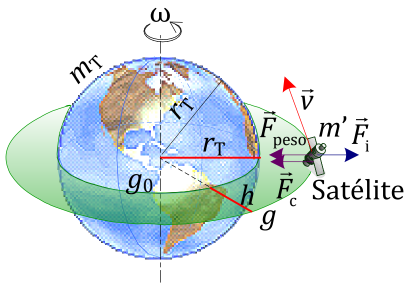
a) Cal debe ser o raio da súa órbita?
b) Canta enerxía se precisa para situalo na órbita?
c) Cal é a velocidade que se lle debería comunicar dende a Terra para facer que escape da atracción gravitatoria?

Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}; m_T = 5,98·10^{24} kg; r_T = 6,37·10^6 m.

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que (para un observador situado no satélite) significa: $F_{peso} = F_{inercia}$, o seu período de revolución, $T_{satélite}$, coincide co da Terra, T_{Terra}: $T_{satélite}$ = 86400 s.

$$\left.\begin{aligned} \frac{m'\cdot v^2}{r_T+h} = m'\cdot\frac{G\cdot m_T}{(r_T+h)^2} \rightarrow v^2=\frac{G\cdot m_T}{r_T+h}\\ v=\frac{s}{t}\rightarrow v=\frac{2\,\pi\cdot(r_T+h)}{T}\end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{2\,\pi\cdot(r_T+h)}{T}\right)^2=\frac{G\cdot m_T}{r_T+h}\rightarrow r_T+h=\sqrt[3]{\frac{G\cdot m_T\cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$r_T+h=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot86400^2}{4\cdot\pi^2}}\rightarrow \boxed{r_T+h=4{,}2\cdot10^7\ \text{m}}$$



b) A enerxía necesaria para poñer o satélite en órbita obtémola a partir de: $E_{\text{mecánica superficie Terra}} = E_{\text{mecánica na órbita}}$

$$\left.\begin{aligned} (E_k+E_p)_{\text{na Terra}} &= (E_k+E_p)_{\text{na órbita}}\\ (E_k+E_p)_{\text{na órbita}} &= \frac{1}{2}\cdot E_{\text{p na órbita}}\end{aligned}\right\}\rightarrow (E_k+E_p)_{\text{na Terra}}=\frac{1}{2}\cdot E_{\text{p na órbita}}$$

$$E_k+\left(-G\cdot\frac{m_T\cdot m'}{r_T}\right)=-\frac{1}{2}\cdot G\cdot\frac{m_T\cdot m'}{(r_T+h)}$$

$$E_k=-\frac{1}{2}\cdot G\cdot\frac{m_T\cdot m'}{(r_T+h)}+G\cdot\frac{m_T\cdot m'}{r_T}\rightarrow E_k=G\cdot m_T\cdot m'\cdot\left[\frac{1}{r_T}-\frac{1}{2\cdot(r_T+h)}\right]$$

$$E_k=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{2\cdot4{,}2\cdot10^7}\right)\rightarrow \boxed{E_k=1{,}16\cdot10^{10}\ \text{J}}$$

c) A velocidade de escape dende a superficie da Terra defínese como a velocidade mínima que debemos comunicar a un corpo para levalo ata ó infinito, e determínase por aplicación do principio de conservación da enerxía: $E_{\text{mecánica superficie Terra}} = E_{\text{mecánica}\ \infty}$

$$E_{\text{pTerra}}+E_{\text{k Terra}}=E_{p\infty}+E_{k\infty}\rightarrow -\frac{G\cdot m_T\cdot m'}{r_T}+\frac{1}{2}\cdot m'\cdot v_{\text{escape}}^2=0\rightarrow v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot m_T}{r_T}}$$

$$v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}}\rightarrow \boxed{v_{\text{escape}}=1{,}12\cdot10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

5. O conxunto de satélites GPS (Global Positioning System) describen órbitas circulares arredor da Terra permitindo que poidamos determinar a posición onde nos atopamos cunha gran precisión. Todos os satélites GPS están á mesma altura e dan dúas voltas á Terra cada 24 horas. Calcula:

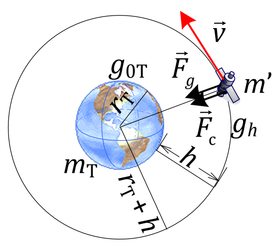
a) A altura da súa órbita sobre a superficie da Terra e a velocidade angular dun dos satélites.
b) A enerxía mecánica e a velocidade lineal que tería un destes satélites na súa órbita.
c) A nova velocidade e o tempo que tardaría en dar unha volta á Terra se o facemos orbitar ao dobre de altura.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $r_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $m_{\text{satélite}} = 150$ kg.

a) Para un observador situado na Terra (sistema de referencia inercial) a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae, que é unha forza normal á traxectoria: $F_{\text{peso}} = F_{\text{centrípeta}}$.

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \dfrac{G \cdot m_T}{(r_T + h)^2} = \dfrac{m \cdot v^2}{r_T + h} \rightarrow \dfrac{G \cdot m_T}{r_T + h} = v^2 \\ v = \dfrac{s}{t} \rightarrow v = \dfrac{2\pi \cdot (r_T + h)}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{G \cdot m_T}{r_T + h} = \left[\frac{2\pi \cdot (r_T + h)}{T}\right]^2 \rightarrow r_T + h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

$$6{,}37 \cdot 10^6 + h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 43200^2}{4\pi^2}} \rightarrow \boxed{h = 2{,}03 \cdot 10^7 \text{ m}}$$



A velocidade angular, ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{43200} \rightarrow \boxed{\omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}}$$

b) A enerxía mecánica na órbita é a suma das súas enerxías cinética e potencial, cuxa expresión é:

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{2 \cdot (r_T + h)}$$

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 150}{2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 2{,}03 \cdot 10^7)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}} = -1{,}12 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

Obtemos a velocidade lineal v a partires da velocidade angular ω: $v = \omega \cdot r$.

$$v = 1{,}45 \cdot 10^{-4} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 2{,}03 \cdot 10^7) \rightarrow \boxed{v = 3{,}87 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) Para o cálculo da velocidade orbital: $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_T}{(r_T + 2h)}}$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2{,}03 \cdot 10^7)}} \rightarrow \boxed{v = 2{,}91 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

O tempo que tarda en dar unha volta será:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2\pi \cdot (r_T + 2h)}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot (r_T + 2h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi (6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2{,}03 \cdot 10^7)}{2{,}91 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{T = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ s}}$$

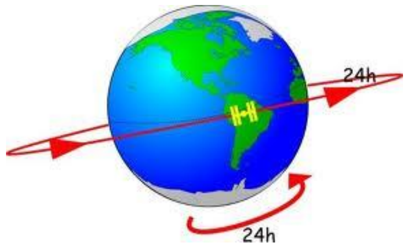
6. A NASA lanzou en 2010 un satélite xeoestacionario (que xira coa mesma velocidade angular que a Terra), o GOES-P (Geostationary Operational Environmental Satellite), que subministrará diariamente información de tipo meteorolóxico e dará conta de actividades solares que poden afectar ao ambiente terrestre. GOES-P ten una masa de $3,1 \cdot 10^3$ kg e describe una órbita circular de $4,22 \cdot 10^7$ m de raio. Con estes datos:

a) Calcula a velocidade areolar do satélite.
b) Supoñendo que o satélite describe a súa órbita no plano ecuatorial da Terra, determina o módulo do momento angular respecto dos polos da Terra.
c) Indica os valores da enerxía cinética e potencial do satélite na órbita.

Datos: T_T = 24 h; r_T = 6370 km; m_T = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg; G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) A velocidade areolar, dA/dt, representa a área que varre o vector de posición que une o centro da Terra co satélite e o tempo que tarda en varrela. Para determinala temos en conta que o vector de posición é perpendicular á velocidade de xiro, polo que:

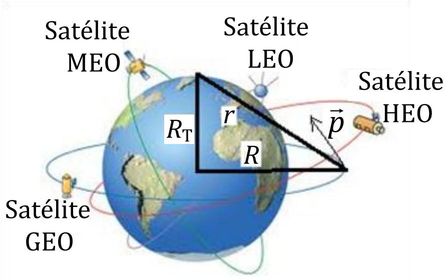
$$\left.\begin{aligned} v_{\text{areolar}} &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2 \cdot m} \\ \vec{L} &= \vec{R} \times \vec{p} \;\rightarrow\; L = R \cdot p = R \cdot m \cdot v \end{aligned}\right\} \rightarrow v_{\text{areolar}} = \frac{R \cdot m \cdot v}{2 \cdot m} = \frac{R \cdot v}{2}$$



$$\left.\begin{aligned} v_{\text{areolar}} &= \frac{R \cdot v}{2} \\ \left.\begin{aligned} v &= \omega \cdot R \\ \omega &= \frac{2\,\pi}{T} \end{aligned}\right\} &\rightarrow v = \frac{2\,\pi}{T} \cdot R \end{aligned}\right\} \rightarrow v_{\text{areolar}} = \frac{R \cdot \left(\frac{2\,\pi}{T} \cdot R\right)}{2} = \frac{\pi \cdot R^2}{T}$$

$$v_{\text{areolar}} = \frac{\pi \cdot \left(4,22 \cdot 10^7\right)^2}{86400} \rightarrow \boxed{v_{\text{areolar}} = 6,48 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}}$$

b) Para determinar o valor do momento angular:



$$\left.\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \;\rightarrow\; L = r \cdot p \\ \left.\begin{aligned} p &= m \cdot v \\ v &= \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} \end{aligned}\right\} &\rightarrow p = m \cdot \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} \\ r &= \sqrt{R^2 + R_T^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow L = \sqrt{R^2 + R_T^2} \cdot m \cdot \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}}$$

$$L = \sqrt{(4,22 \cdot 10^7)^2 + (6,37 \cdot 10^6)^2} \cdot 3,1 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4,22 \cdot 10^7}}$$

$$\boxed{L = 4,07 \cdot 10^{14}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s}}$$

c) Cálculo das enerxías cinética e potencial na órbita

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ v &= \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} \end{aligned}\right\} \rightarrow E_k = \frac{m \cdot \frac{G \cdot m_T}{R}}{2} \rightarrow E_k = \frac{3,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4,22 \cdot 10^7}}{2} \rightarrow \boxed{E_k = 1,47 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}$$

$$E_p = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{R} \rightarrow E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 3,1 \cdot 10^3}{4,22 \cdot 10^7} \rightarrow \boxed{E_p = -2,93 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}$$

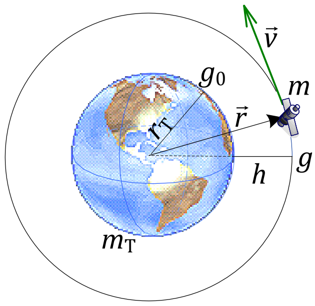
7. A 760 km da superficie terrestre orbita, dende 2009, o satélite franco-español SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity), que forma parte dunha misión da Axencia Espacial Europea (ESA) para recoller información sobre o planeta. A masa do satélite é de 683 kg.

a) Calcula a enerxía cinética do satélite e a súa enerxía mecánica total.
b) Calcula o módulo do momento angular do satélite respecto do centro da Terra.
c) Xustifica por qué a velocidade areolar do satélite permanece constante.

Datos: $r_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Cálculo da enerxía cinética e da enerxía total:

$$\left.\begin{aligned} & E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \\ & v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r_T + h}} \to v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}37 \cdot 10^6 + 0{,}76 \cdot 10^6\right)}} = 7{,}48 \cdot 10^3 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}\right\} \to E_k = \frac{683 \cdot \left(7{,}48 \cdot 10^3\right)^2}{2}$$



$$\boxed{E_k = 1{,}91 \cdot 10^{10} \ \mathrm{J}}$$

$$E_p = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{r_T + h} \to E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 683}{\left(6{,}37 \cdot 10^6 + 0{,}76 \cdot 10^6\right)} \to E_p = -3{,}82 \cdot 10^{10} \ \mathrm{J}$$

$$E_{total} = E_k + E_p \to E_{total} = 1{,}91 \cdot 10^{10} + \left(-3{,}82 \cdot 10^{10}\right) \to \boxed{E_{total} = -1{,}91 \cdot 10^{10} \ \mathrm{J}}$$

b) O momento angular $\vec{L}$ do satélite respecto do centro da Terra é o momento da cantidade de movemento $\vec{p}$ respecto dese punto: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sendo $\vec{r}$ o vector de posición que une o centro da Terra co satélite.

$$\left.\begin{aligned} & \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to L = r \cdot p = r \cdot m \cdot v \\ & r = 6{,}37 \cdot 10^6 + 0{,}76 \cdot 10^6 = 7{,}13 \cdot 10^6 \ \mathrm{m} \\ & m = 683 \ \mathrm{kg} \\ & v = 7{,}48 \cdot 10^3 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \end{aligned}\right\} \to \boxed{L = 3{,}64 \cdot 10^{13} \ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}}$$

c) A segunda lei de Kepler dinos que no movemento dun satélite respecto do seu planeta, a área que varre o vector de posición do satélite respecto do centro do planeta, chamada velocidade areolar, é constante: $v_{areolar} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2m}$. Para xustificar a constancia de $v_{areolar}$ temos que ver que o módulo do momento angular $\vec{L}$ é constante.

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\vec{r} \times (m\vec{v})\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \\ & \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \\ & \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \end{aligned}\right\} \to \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F}$$

Como o vector $(m \cdot \vec{v})$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{0}$. Por outro lado, como o satélite se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$

teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180º) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$. En consecuencia $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$.

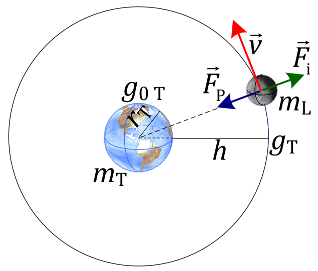
8. Sabendo que o período de revolución lunar é de 27,32 días e que o raio da órbita da Lúa é $3{,}84 \cdot 10^8$ m, calcula:

a) A constante de gravitación universal, *G*.
b) A enerxía cinética e potencial da Lúa respecto da Terra.
c) Se un satélite se sitúa entre a Terra e a Lúa a unha distancia do centro da Terra de $5\,r_L$, cal é a relación entre as forzas que exercen a Terra e a Lúa sobre el?

Datos: $r_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; ; $r_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m; $m_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

a) Cálculo da constante de Gravitación Universal

$$\left.\begin{array}{r} F_{\text{inercia}} = F_{\text{peso}} \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_T}{(r_T + h)}} \\ v = \omega (r_T + h) \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2\pi}{T}(r_T + h) = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)}}$$



$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (r_T + h)^2 = \frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)} \rightarrow G = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{(r_T + h)^3}{m_T}$$

$$G = \frac{4\pi^2}{(27{,}32 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot \frac{(3{,}84 \cdot 10^8)^3}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \rightarrow \boxed{G = 6{,}71 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}}$$

b) Cálculo da enerxía cinética e potencial:

$$\left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{m_L \cdot v^2}{2} \\ v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_T}{r_T + h}} \rightarrow v^2 = \dfrac{6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{3{,}84 \cdot 10^8} \rightarrow v^2 = 1{,}045 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$E_k = \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}045 \cdot 10^6}{2} \rightarrow \boxed{E_k = 3{,}84 \cdot 10^{28}\ \text{J}}$$

$$E_p = -\frac{G \cdot m_T \cdot m_L}{r_T + h} \rightarrow E_p = -\frac{6{,}71 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{3{,}84 \cdot 10^8} \rightarrow \boxed{E_p = -7{,}68 \cdot 10^{28}\ \text{J}}$$

c) Relación de forzas:

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{T-satélite}} = \dfrac{G\, m_T\, m_{\text{satélite}}}{r^2_{\text{T-satélite}}} = \dfrac{G\, m_T\, m_{\text{satélite}}}{(5\,r_L)^2} \\ F_{\text{L-satélite}} = \dfrac{G\, m_L\, m_{\text{satélite}}}{r^2_{\text{L-satélite}}} = \dfrac{G\, m_L\, m_{\text{satélite}}}{(r_T + h - 5\,r_L)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{F_{\text{T-satélite}}}{F_{\text{L-satélite}}} = \frac{\dfrac{G\, m_T\, m_{\text{satélite}}}{(5\,r_L)^2}}{\dfrac{G\, m_L m_{\text{satélite}}}{(r_T + h - 5\,r_L)^2}} \rightarrow \frac{F_{\text{T-satélite}}}{F_{\text{L-satélite}}} = \frac{m_T \cdot (r_T + h - 5\,r_L)^2}{m_L \cdot (5\,r_L)^2}$$

$$\frac{F_{\text{T-satélite}}}{F_{\text{L-satélite}}} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot (3{,}84 \cdot 10^8 - 5 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6)^2}{7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot (5 \cdot 1{,}74 \cdot 10^6)^2} \rightarrow \boxed{\frac{F_{\text{T-satélite}}}{F_{\text{L-satélite}}} = 1{,}5 \cdot 10^5}$$

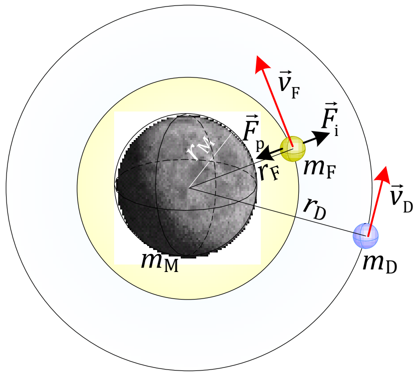
9. Fobos é un satélite de Marte que xira nunha órbita circular de 9380 km de raio, respecto ao centro do planeta, cun período de revolución de 7,65 horas. Outro satélite de Marte, Deimos, xira nunha órbita de 23460 km de raio. Determina:

a) A masa de Marte e o período de revolución do satélite Deimos.
b) A enerxía mecánica do satélite Deimos.
c) O módulo do momento angular de Deimos respecto ao centro de Marte.

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N $\cdot$m$^2\cdot$kg^{-2}; masa de Deimos = $2{,}4\cdot10^{15}$ kg.

a) Fobos está en órbita estacionaria ó redor de Marte e para un observador ligado ó satélite (sistema de referencia non inercial) cúmprese que: $\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$.

$$m_{\text{Fobos}} \cdot g_{\text{Marte en Fobos}} = m_{\text{Fobos}} \cdot \frac{v_{\text{Fobos}}^2}{r_{\text{órbita de Fobos}}} \rightarrow v_{\text{F}}^2 = g_{\text{Marte en Fobos}} \cdot r_{\text{órbita de F}}$$



$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{F}}^2 = g_{\text{M}} \cdot r_{\text{órbita de F}} \\ g_{\text{de M en Fobos}} = \dfrac{G\cdot m_{\text{M}}}{r_{\text{órbita de F}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{F}}^2 = \frac{G\cdot m_{\text{M}}}{r_{\text{órbita de F}}}$$

Co dato do tempo T que Fobos tarda en dar unha volta completa ó redor de Marte podemos calcular a súa velocidade lineal de xiro, v_{F}: $v_{\text{F}} = s_{\text{órbita de Fobos}}/T$.

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{F}} = \dfrac{2\,\pi\, r_{\text{F}}}{T} \\ v_{\text{F}}^2 = \dfrac{G\cdot m_{\text{M}}}{r_{\text{F}}} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{2\,\pi\, r_{\text{F}}}{T}\right)^2 = \frac{G\cdot m_{\text{M}}}{r_{\text{F}}} \rightarrow m_{\text{M}} = \frac{4\,\pi^2\, r_{\text{F}}^3}{T^2\cdot G}$$

$$m_{\text{M}} = \frac{4\,\pi^2\cdot\left(9{,}38\cdot10^6\right)^3}{\left(7{,}65\cdot3600\right)^2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}} \rightarrow \boxed{m_{\text{M}} = 6{,}44\cdot10^{23}\ \text{kg}}$$

Para o cálculo do período de revolución de Deimos, T_{D}, recordamos a terceira lei de Kepler: o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un satélite en dar unha volta completa arredor do planeta (período, T) e o cubo do raio r da órbita que describe é constante: T^2/r^3 = cte. Aplicando esta lei a Fobos e a Deimos resulta:

$$\frac{T_{\text{F}}^2}{r_{\text{F}}^3} = \frac{T_{\text{D}}^2}{r_{\text{D}}^3} \rightarrow \frac{7{,}65^2}{\left(9380\cdot10^3\right)^3} = \frac{T_{\text{D}}^2}{\left(23460\cdot10^3\right)^3} \rightarrow \boxed{T_{\text{D}} = 30{,}3\ \text{h}}$$

b) Cálculo da enerxía mecánica de Deimos

$$E_{\text{mecánica Deimos}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot m_{\text{Marte}}\cdot m_{\text{Deimos}}}{r_{\text{órbita de Deimos}}} \rightarrow E_{\text{mecánica Deimos}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot m_{\text{M}}\cdot m_{\text{D}}}{r_{\text{D}}}$$

$$E_{\text{mecánica Deimos}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}44\cdot10^{23}\cdot2{,}4\cdot10^{15}}{23460\cdot10^3} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica Deimos}} = -2{,}20\cdot10^{21}\ \text{J}}$$

c) O momento angular $\vec{L}$ de Deimos respecto ó centro de Marte é o momento da cantidade de movemento $\vec{p}_{\text{Deimos}}$ respecto dese punto: $\vec{L}_{\text{Deimos}} = \vec{r}\times\vec{p}_{\text{Deimos}}$, sendo $\vec{r}$ o vector de posición que une o centro de Marte co satélite.

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \;\rightarrow\; L_{\mathrm{D}} = r_{\mathrm{D}} \cdot p_{\mathrm{D}} = r_{\mathrm{D}} \cdot m_{\mathrm{D}} \cdot v_{\mathrm{D}} \\
r_{\mathrm{D}} = 23460 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m} \\
m_{\mathrm{D}} = 2,4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{kg} \\
v_{\mathrm{D}} = \sqrt{\dfrac{G\,M_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{D}}}} \;\rightarrow\; v_{\mathrm{D}} = \sqrt{\dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,44 \cdot 10^{23}}{23460 \cdot 10^{3}}} \;\rightarrow\; v_{\mathrm{D}} = 1353\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}
\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{L = 7,6 \cdot 10^{25}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

10. Nun planeta esférico coa mesma densidade media que a Terra e cun raio que é a metade do terrestre:

a) Cal é a aceleración da gravidade na superficie do planeta?
b) Cal sería o período dun satélite que se move nunha órbita circular a unha altura de 400 km respecto da superficie do planeta?
c) Como sería a variación do seu campo gravitatorio coa profundidade?

Datos: raio da Terra, r_T = 6370 km; aceleración da gravidade na superficie da Terra, g_{0T} = 9,8 m·s⁻².

a) Cálculo da aceleración da gravidade

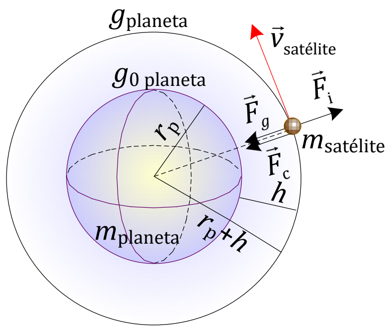
$$g_{0\,\text{planeta}}=\frac{G\cdot m_\text{planeta}}{r^2_\text{planeta}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\rho_\text{planeta}=\dfrac{m_\text{planeta}}{V_\text{planeta}}=\dfrac{m_\text{planeta}}{\frac{4}{3}\pi\, r^3_\text{planeta}}\\ r_\text{planeta}=\dfrac{r_\text{Terra}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \rho_\text{planeta}=\dfrac{m_\text{planeta}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_\text{Terra}}{2}\right)^3}\\ \left.\begin{array}{l}\rho_\text{planeta}=\rho_\text{Terra}\\ \rho_\text{Terra}=\dfrac{m_\text{Terra}}{V_\text{Terra}}=\dfrac{m_\text{Terra}}{\frac{4}{3}\pi\, r^3_\text{Terra}}\end{array}\right\}\rightarrow \rho_\text{planeta}=\dfrac{m_\text{Terra}}{\frac{4}{3}\pi\, r^3_\text{Terra}}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{m_\text{planeta}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_\text{Terra}}{2}\right)^3}=\frac{m_\text{Terra}}{\frac{4}{3}\pi\, r^3_\text{Terra}}\rightarrow m_\text{planeta}=\frac{m_\text{Terra}}{8}$$

$$\left.\begin{array}{r}g_{0\,\text{planeta}}=\dfrac{G\cdot m_\text{planeta}}{r^2_\text{planeta}}\\ m_\text{planeta}=\dfrac{m_\text{Terra}}{8}\\ r_\text{planeta}=\dfrac{r_\text{Terra}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}g_{0\,\text{planeta}}=\dfrac{G\cdot\frac{m_\text{Terra}}{8}}{\left(\frac{r_\text{Terra}}{2}\right)^2}=\dfrac{G\cdot m_\text{Terra}}{2\,r^2_\text{Terra}}\\ g_{0\,\text{Terra}}=\dfrac{G\cdot m_\text{Terra}}{r^2_\text{Terra}}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}g_{0\,\text{planeta}}=\dfrac{g_{0\,\text{Terra}}}{2}\\ g_{0\,\text{Terra}}=9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\end{array}\right\}\rightarrow \boxed{g_{0\,\text{planeta}}=4{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

b) Cálculo do período da órbita dun satélite a 400 km da súa superficie.

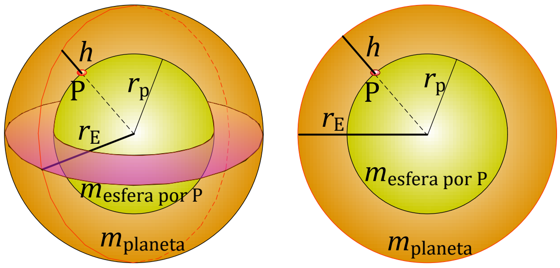
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}T_\text{satélite}=\dfrac{2\pi}{\omega_\text{satélite}}\\ \omega_\text{satélite}=\dfrac{v_\text{satélite}}{r_p+h}\end{array}\right\}\rightarrow T_\text{satélite}=\dfrac{2\pi\left(r_p+h\right)}{v_\text{satélite}}\\ v_\text{satélite}=\sqrt{\dfrac{G\cdot m_\text{planeta}}{r_p+h}}\end{array}\right\}\rightarrow T_\text{satélite}=\frac{2\pi\sqrt{\left(r_p+h\right)^3}}{\sqrt{G\cdot m_\text{planeta}}}$$



$$\left.\begin{array}{r}T_\text{satélite}=\dfrac{2\pi\cdot\sqrt{\left(r_p+h\right)^3}}{\sqrt{G\cdot m_\text{planeta}}}\\ r_p=\dfrac{r_\text{Terra}}{2}\\ m_\text{planeta}=\dfrac{m_T}{8}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}T_\text{satélite}=\dfrac{2\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{r_\text{Terra}}{2}+h\right)^3}}{\sqrt{G\cdot\frac{m_\text{Terra}}{8}}}\\ G\cdot m_\text{Terra}=g_{0\,\text{Terra}}\cdot r^2_\text{Terra}\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow T_{\text{satélite}} = \frac{2\,\pi\sqrt{\left(\frac{r_{\text{Terra}}}{2}+h\right)^3}}{\sqrt{\frac{g_{0\ \text{Terra}}\cdot r_{\text{Terra}}^2}{8}}} \rightarrow T_{\text{satélite}} = \frac{2\,\pi\sqrt{\left(\frac{6370\cdot 10^3}{2}+400\cdot 10^3\right)^3}}{\sqrt{\frac{9{,}8\cdot\left(6370\cdot 10^3\right)^2}{8}}} \rightarrow \boxed{T_{\text{satélite}} = 6049\ \text{s}}$$

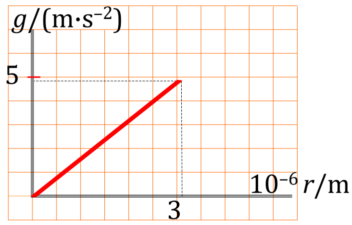
c) Supoñamos un punto P no interior do planeta, a unha profundidade h respecto á súa superficie. A intensidade de campo gravitatorio no punto P vén dada pola expresión: $g=\frac{G\cdot m_{\text{esfera por P}}}{r^2}$, sendo $m_{\text{esfera por P}}$ a masa da esfera que, tendo por centro o do planeta, pasa polo punto onde queremos coñecer g. Como a medida que r diminúe tamén diminúe o valor de $m_{\text{esfera por P}}$, para saber como varía o valor de g con r imos expresar $m_{\text{esfera por P}}$ en función de r. Con este fin recordamos que $m = \rho \cdot V$, sendo ρ a densidade do planeta, que ó consideralo como unha esfera homoxénea ten un valor constante, e V o seu volume que, en función de r, é: $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$. En consecuencia resulta: $m_{\text{esfera por P}}=\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$.



Substituíndo na expresión de g temos:

$$g=\frac{G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3}{r^2} \rightarrow g=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r \rightarrow g=\text{cte}\cdot r$$

Vemos que o valor de g, para puntos interiores do planeta, aumenta de forma directamente proporcional co valor de r, correspondéndolle a representación gráfica que á marxe se indica.



11. A partir dos seguintes datos do Sistema Solar:

Planeta	Distancia media ó Sol/UA	Período orbital/anos	$r_{planeta}/r_T$	$m_{planeta}/m_T$
Mercurio	0,387	0,2408	0,386	0,055
Venus	0,723	0,6152	0,949	0,815
Terra	1,00	1,00	1,00	1,00
Marte	1,52	1,881	0,532	0,107
Xúpiter	5,20	11,86	11,2	318
Saturno	9,54	29,45	9,45	95
Urano	19,2	84,02	4,01	14
Neptuno	30,1	164,8	3,88	17

a) Calcula o valor da constante da terceira lei de Kepler para Marte, Saturno e Neptuno.
b) Calcula a masa do Sol
c) Calcula a aceleración da gravidade na superficie de Venus.

Datos: 1 UA = $1,496 \cdot 10^{11}$ m; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $g_{\text{superficie Terra}} = 9,8$ N·kg⁻¹.

a) Terceira lei de Kepler: $\dfrac{T^2_{\text{planeta}}}{r^3_{\text{órbita planeta}}} = \text{cte.}$

Marte: $\dfrac{T^2_{\text{Marte}}}{r^3_{\text{órbita Marte}}} = \dfrac{1{,}881^2}{1{,}52^3} \rightarrow \dfrac{T^2_{\text{Marte}}}{r^3_{\text{órbita Marte}}} = 1{,}0075 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$

Saturno: $\dfrac{T^2_{\text{Saturno}}}{r^3_{\text{órbita Saturno}}} = \dfrac{29{,}45^2}{9{,}54^3} \rightarrow \dfrac{T^2_{\text{Saturno}}}{r^3_{\text{órbita Saturno}}} = 0{,}9989 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$

Neptuno: $\dfrac{T^2_{\text{Neptuno}}}{r^3_{\text{órbita Neptuno}}} = \dfrac{164{,}8^2}{30{,}1^3} \rightarrow \dfrac{T^2_{\text{Neptuno}}}{r^3_{\text{órbita Neptuno}}} = 0{,}9959 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$

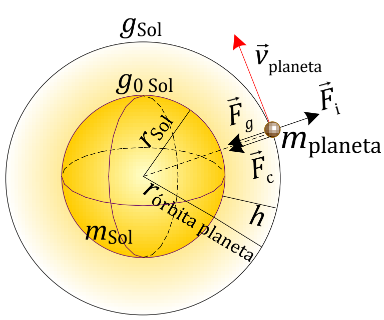
O valor medio da constante é: $\boxed{\text{cte} = 1{,}0008 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3} = 2{,}97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}}$

b) Cálculo da masa do Sol: m_{Sol}.

$$\left.\begin{array}{r} F_c = F_g = F_i \rightarrow m_{\text{planeta}} \cdot a_c = m_{\text{planeta}} \cdot g_{\text{Sol}} \\ a_{\text{c planeta}} = \dfrac{v^2_{\text{planeta}}}{r_{\text{órbita planeta}}} \\ g_{\text{Sol}} = G \cdot \dfrac{m_{\text{Sol}}}{r^2_{\text{órbita planeta}}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{v^2_{\text{planeta}}}{r_{\text{órbita planeta}}} = G \cdot \frac{m_{\text{Sol}}}{r^2_{\text{órbita planeta}}} \rightarrow v_{\text{planeta}} = \sqrt{G \cdot \frac{m_{\text{Sol}}}{r_{\text{órbita planeta}}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_{\text{Sol}}}{r_{\text{órb. planeta}}}} \\ v = \dfrac{2\,\pi\, r_{\text{órb. planeta}}}{T_{\text{planeta}}} \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{\frac{G \cdot m_{\text{Sol}}}{r_{\text{órb. planeta}}}} = \frac{2\,\pi\, r_{\text{órb. planeta}}}{T_{\text{planeta}}} \rightarrow \frac{G \cdot m_{\text{Sol}}}{r_{\text{órb. planeta}}} = \frac{4\,\pi^2\, r^2_{\text{órb. planeta}}}{T^2_{\text{planeta}}} \rightarrow \frac{T^2_{\text{planeta}}}{r^3_{\text{órb. planeta}}} = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot m_{\text{Sol}}} = \text{cte}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{cte} = \dfrac{4\,\pi^2}{G \cdot m_{\text{Sol}}} \rightarrow m_{\text{Sol}} = \dfrac{4\,\pi^2}{G \cdot \text{cte}} \\ G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \\ \text{cte} = 2{,}97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{m_{\text{Sol}} = 1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}$$



c) Aceleración da gravidade en Venus:

$$\left.\begin{array}{l} g_{\text{Venus}} = \dfrac{G \cdot m_{\text{Venus}}}{r_{\text{Venus}}^2} \\ \dfrac{m_{\text{Venus}}}{m_{\text{Terra}}} = 0{,}815 \\ \dfrac{r_{\text{Venus}}}{r_{\text{Terra}}} = 0{,}949 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} g_{\text{Venus}} = \dfrac{G \cdot m_{\text{Terra}} \cdot 0{,}815}{\left(r_{\text{Terra}} \cdot 0{,}949\right)^2} \\ \dfrac{G \cdot m_{\text{Terra}}}{r_{\text{Terra}}{}^2} = g_{0\ \text{Terra}} = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Venus}} = \dfrac{9{,}8 \cdot 0{,}815}{0{,}949^2} \rightarrow \boxed{g_{\text{Venus}} = 8{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

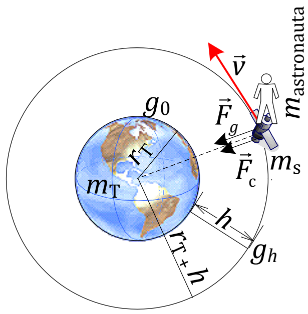
12. A ISS (*International Space Station*) é o resultado da colaboración internacional para construír e manter unha plataforma de investigación con presenza humana de larga duración no espazo. Se a masa da ISS é de $3,7 \cdot 10^5$ kg e describe unha órbita circular arredor da Terra a unha distancia de $3,59 \cdot 10^5$ m da súa superficie, calcula:

a) A velocidade orbital da ISS e o tempo que tarda en dar unha volta arredor da Terra.
b) A enerxía mecánica da ISS.
c) A forza gravitatoria sobre un astronauta de 80 kg de masa que se atope na ISS.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $m_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $r_{\text{Terra}} = 6370$ km.

a) Para un observador situado na Terra (sistema de referencia inercial), a forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_g$, que é normal á traxectoria do satélite:

$$\vec{F}_{\text{peso}} = \vec{F}_{\text{normal}} \rightarrow F_g = F_c \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r_T + h} \rightarrow v = \sqrt{g(r_T + h)}$$



$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g(r_T + h)} \\ g = \dfrac{G\, m_T}{(r_T + h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\, m_T}{r_T + h}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^5)}} \rightarrow \boxed{v = 7700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$v = \frac{2\pi(r_T + h)}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi(r_T + h)}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^5)}{7700} \rightarrow \boxed{T = 5491 \text{ s}}$$

b) Cálculo da enerxía mecánica

$$E_{\text{mecánica}} = E_k + E_p = -\frac{G \cdot m_T \cdot m_s}{2 \cdot (r_T + h)}$$

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 3,7 \cdot 10^5}{2 \cdot (6,370 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^5)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}} = -1,10 \cdot 10^{13} \text{ J}}$$

c) Forza gravitatoria

$$F_g = m_{\text{astronauta}} \cdot g = m_{\text{astronauta}} \cdot \frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)^2} \rightarrow F_g = 80 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,370 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^5)^2} \rightarrow \boxed{F_g = 705 \text{ N}}$$

13. Unha cometa de masa 10^{12} kg achégase ó Sol dende un punto moi afastado do sistema solar, podéndose considerar que a súa velocidade inicial é nula. Calcula:

a) A velocidade da cometa no perihelio (situado a unha distancia aproximada de cen millóns de quilómetros do Sol).
b) A enerxía potencial cando cruce a órbita da Terra (a unha distancia r = 1,5·10^8 km).
c) O valor do módulo do momento angular no perihelio.

Datos: $m_{\text{Sol}} = 2 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Se o lugar de onde provén a cometa está moi afastado do sistema solar, podemos considerar que a distancia é infinita e, polo tanto, a enerxía potencial nula, o mesmo que a enerxía total, pois a velocidade inicial é cero.

No perihelio, ten unha enerxía potencial negativa que imos calcular, e que ten que ser contrarrestada, en base ó principio de conservación da enerxía, pola enerxía cinética, positiva. A partir desta calculamos a velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} E_k + E_p = 0 \\ E_k = \dfrac{m_{\text{cometa}} \cdot v^2_{\text{cometra}}}{2} \\ E_p = -\dfrac{G \cdot m_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{cometa}}}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{m_{\text{cometa}} \cdot v^2_{\text{cometra}}}{2} + \left(-\frac{G \cdot m_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{cometa}}}{r}\right) = 0 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m_{\text{Sol}}}{r}}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{100 \cdot 10^9}} \rightarrow \boxed{v = 5{,}2 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) Para a enerxía potencial ó cruzar a órbita da Terra, é indiferente de onde proceda a cometa, tendo que establecer só a ecuación correspondente: $E_p = -\dfrac{G \cdot m_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{cometa}}}{r}$

Entón, só nos resta substituír os datos da masa do Sol, a da cometa e a distancia ó Sol cando cruza a órbita da Terra, xunto coa constante de gravitación universal:

$$E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{12}}{1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{E_p = -8{,}9 \cdot 10^{20} \text{ J}}$$

c) O módulo do momento angular no perihelio será:

$$L = r \cdot m_{\text{cometa}} \cdot v_{\text{cometa}} \rightarrow L = 100 \cdot 10^9 \cdot 10^{12} \cdot 5{,}2 \cdot 10^4 \rightarrow \boxed{L = 5{,}2 \cdot 10^{27} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$$

14. Nun planeta cun raio que é a metade do raio terrestre, a aceleración da gravidade na súa superficie vale 5 m·s⁻². Calcula:

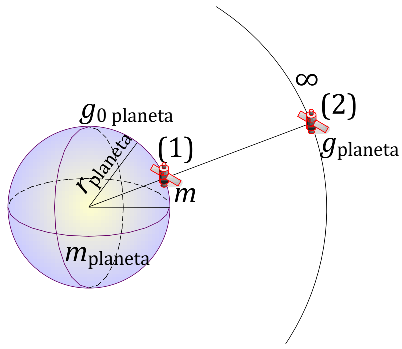
a) A relación entre as masas do planeta e da Terra.
b) A velocidade de escape para un corpo situado nese planeta (r_T = 6370 km)
c) A altura a que é necesario deixar caer un obxecto no planeta, para que chegue á súa superficie coa mesma velocidade coa que o fai na Terra, cando cae dende unha altura de 100 m.

(Na Terra: g_{0T} =10 m·s⁻²).

a) A intensidade do campo gravitatorio dunha masa *m* a unha distancia *r* vén dada pola expresión:

$$g=\frac{G\cdot m}{r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\text{ planeta}}=\dfrac{G\cdot m_{\text{planeta}}}{r_{\text{planeta}}^2} \\ g_{0\text{ Terra}}=\dfrac{G\cdot m_{\text{Terra}}}{r_{\text{Terra}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{m_{\text{planeta}}}{m_{\text{Terra}}}=\dfrac{g_{0\text{ planeta}}}{g_{0\text{ Terra}}}\cdot\dfrac{r_{\text{planeta}}^2}{r_{\text{Terra}}^2} \\ r_{\text{planeta}}=r_{\text{Terra}}/2 \\ g_{0\text{ planeta}}=g_{0\text{ Terra}}/2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\frac{m_{\text{planeta}}}{m_{\text{Terra}}}=\frac{1}{8}}$$



b) A velocidade de escape dende a superficie dun planeta defínese como a velocidade mínima que debemos comunicar a un corpo para que chegue ata o infinito, e determínase por aplicación do principio de conservación da enerxía mecánica: $E_{\text{mecánica superficie planeta}}=E_{\text{mecánica }\infty}$.

$$E_{\text{p planeta}}+E_{\text{k planeta}}=E_{\text{p }\infty}+E_{\text{k }\infty} \rightarrow -\frac{G\cdot m_{\text{planeta}}\cdot m}{r_{\text{planeta}}}+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{\text{escape}}^2=0 \rightarrow v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot m_{\text{planeta}}}{r_{\text{planeta}}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{escape}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot G\cdot m_{\text{planeta}}}{r_{\text{planeta}}}} \\ \dfrac{m_{\text{planeta}}}{m_{\text{Terra}}}=\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{r_{\text{planeta}}}{r_{\text{Terra}}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v_{\text{escape}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot G\cdot m_{\text{Terra}}\cdot 2}{r_{\text{Terra}}\cdot 8}} \\ G\, m_{\text{Terra}}=g_{0\text{ Terra}}\cdot r_{\text{Terra}}^2 \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot g_{0\text{ Terra}}\cdot r_{\text{Terra}}^2\cdot 2}{r_{\text{Terra}}\cdot 8}}$$

$$v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot g_{0\text{ Terra}}\cdot r_{\text{Terra}}\cdot 2}{8}} \rightarrow v_{\text{escape}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 6370\cdot 10^3\cdot 2}{8}} \rightarrow \boxed{v_{\text{escape}}=5{,}64\cdot 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

c) Como a altura á superficie da Terra desde a que se deixa caer o obxecto é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado:

$$\vec{y}=\vec{v}_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2$$

$$\vec{v}_{\text{f}}=\vec{v}_0+\vec{g}\cdot t$$

Para o caso do planeta:

$$\left.\begin{array}{l} h=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot t^2 \\ v_\mathrm{f}=5\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow h=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{v_\mathrm{f}^2}{5^2}$$

Para o caso da Terra:

$$\left.\begin{array}{l} v_\mathrm{f}=g_{0\mathrm{T}}\cdot t \\ 100=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \rightarrow t=\sqrt{20}\ \mathrm{s} \end{array}\right\} \rightarrow v_\mathrm{f}=10\cdot\sqrt{20}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

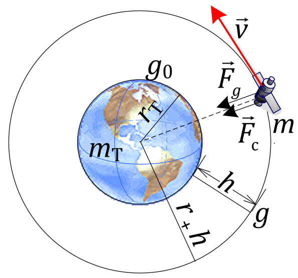
$$\rightarrow h=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{\left(10\cdot\sqrt{20}\right)^2}{5^2} \rightarrow \boxed{h=200\ \mathrm{m}}$$

15. Un satélite de comunicacións de 1 t describe órbitas circulares arredor da Terra cun período de 90 minutos. Calcula:

a) A altura á que se atopa sobre a Terra.
b) A velocidade orbital
c) A enerxía total.

Datos: r_T = 6400 km; m_T = 5,98·10^{24} kg; G = 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}.

a) A forza centrípeta que fai variar a dirección da velocidade do satélite é a forza gravitatoria que exerce a Terra sobre o satélite a esa distancia do seu centro:



$$\vec{F}_{\text{peso}} = \vec{F}_{\text{centrípeta}} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{centrípeta}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\left(r+h\right)}$$

Relacionamos a velocidade lineal de xiro do satélite coa velocidade angular, a cal escribimos en función do período de revolución:

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g \cdot \left(r+h\right)} \\ \left.\begin{array}{l} v = \omega \cdot \left(r+h\right) \\ \omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow v = \dfrac{2\,\pi}{T} \cdot \left(r+h\right) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{g \cdot \left(r+h\right)} = \dfrac{2\,\pi}{T} \cdot \left(r+h\right) \\ g = \dfrac{G \cdot m_T}{\left(r+h\right)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left(r+h\right) = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$\left(r+h\right) = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(90 \cdot 60\right)^2}{4\pi^2}} \rightarrow \left(r+h\right) = 6{,}65 \cdot 10^{6}\ \text{m} \rightarrow \boxed{h = 2{,}50 \cdot 10^{5}\ \text{m}}$$

b) O movemento do satélite é uniforme e a velocidade orbital pode calcularse como: $v = \dfrac{s}{t}$.

$$v = \frac{2\,\pi\,r}{T} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}65 \cdot 10^{6}}{90 \cdot 60} \rightarrow \boxed{v = 7{,}74 \cdot 10^{3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) A enerxía total do satélite é a suma das súas enerxías cinética e potencial

$$E_{\text{mecánica}} = E_k + E_P = -\frac{G \cdot m_T \cdot\ m}{2\left(r+h\right)}$$

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{2 \cdot 6{,}65 \cdot 10^{6}} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}} = -3{,}00 \cdot 10^{10}\ \text{J}}$$

16. Un corpo de masa 1000 kg xira a 200 km por enriba da superficie da Terra.

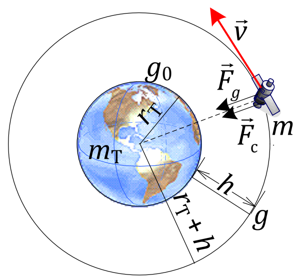
a) Cal é a aceleración da gravidade a esa altura?
b) Cal é o valor do potencial gravitatorio a esa altura?
c) Cal é o valor da enerxía total?

Datos: g_0 = 9,81 m·s⁻²; r_T = 6370 km.

a) Calculamos o valor de g a esa altura á altura h:

$$\left.\begin{array}{l} g=\dfrac{G\cdot m_T}{(r_T+h)^2} \\ g_0=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T^2}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{g}{g_0}=\frac{r_T^2}{(r_T+h)^2} \rightarrow \frac{g}{9{,}81}=\frac{\left(6370\cdot10^3\right)^2}{\left(6370\cdot10^3+200\cdot10^3\right)^2} \rightarrow \boxed{g=9{,}22\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

b) O potencial gravitatorio:



$$\left.\begin{array}{l} V=-G\cdot\dfrac{m_T}{r_T+h} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2\end{array}\right\} \rightarrow V=-\frac{g_{0T}\cdot r_T^2}{r_T+h}$$

$$V=-\frac{9{,}81\cdot\left(6{,}370\cdot10^6\right)^2}{6370\cdot10^3+200\cdot10^3} \rightarrow \boxed{V=-6{,}06\cdot10^7\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}}}$$

c) A enerxía total será:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica}}=E_k+E_P=-\dfrac{G\cdot m_T\cdot m}{2\cdot(r_T+h)} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2\end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{mecánica}}=-\frac{g_{0T}\cdot r_T^2\cdot m}{2\cdot(r_T+h)}$$

$$E_{\text{mecánica}}=-\frac{9{,}81\cdot\left(6370\cdot10^3\right)^2\cdot1000}{2\cdot\left(6370\cdot10^3+200\cdot10^3\right)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}}=-3{,}03\cdot10^{10}\ \mathrm{J}}$$

17. Sabendo que o planeta Venus tarda 224,7 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a distancia de Neptuno ó Sol é $4,504 \cdot 10^9$ km así como que a Terra inviste 365,256 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a súa distancia a este é $1,495 \cdot 10^8$ km, calcula:

a) A distancia de Venus ó Sol.
b) A duración dunha revolución completa de Neptuno arredor do Sol.
c) A velocidade orbital de Neptuno arredor do Sol.

a) A 3ª lei de Kepler dinos que T^2 é directamente proporcional a r^3 sendo T o período de revolución do planeta e r o raio da súa órbita. Aplicando isto á Terra e a Venus temos:

$$\frac{T_\mathrm{T}^2}{r_\mathrm{T}^3}=\frac{T_\mathrm{V}^2}{r_\mathrm{V}^3} \rightarrow \frac{365{,}256^2}{\left(1{,}495\cdot 10^8\right)^3} = \frac{224{,}7^2}{r_\mathrm{V}^3} \rightarrow \boxed{r_\mathrm{V}=108{,}14\cdot 10^6\ \mathrm{km}}$$

b) Aplicamos novamente a 3ª lei de Kepler para o caso da Terra e Neptuno:

$$\frac{T_\mathrm{T}^2}{r_\mathrm{T}^3}=\frac{T_\mathrm{N}^2}{r_\mathrm{N}^3} \rightarrow \frac{365{,}256^2}{\left(1{,}495\cdot 10^8\right)^3} = \frac{T_\mathrm{N}^2}{\left(4{,}504\cdot 10^9\right)^3} \rightarrow \boxed{T_\mathrm{N}=6{,}04\cdot 10^4\ \text{días}}$$

c) Considerando o movemento de Neptuno como uniforme, mediante a fórmula $v = s/t$ calculamos a súa velocidade orbital:

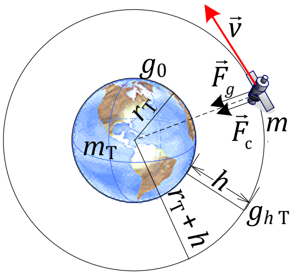
$$v=\frac{2\,\pi\, r}{T} \rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot 4{,}504\cdot 10^9\cdot 10^3}{6{,}04\cdot 10^4\cdot 24\cdot 3600} \rightarrow \boxed{v=5{,}42\cdot 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

18. Un satélite artificial de 200 kg describe unha órbita circular a 400 km de altura sobre a superficie terrestre. Calcula:

a) O valor da gravidade a esa altura.
b) A enerxía mecánica.
c) A velocidade que se lle comunicou na superficie da Terra para colocalo nesa órbita.

Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻² ; m_T = 5,98·10²⁴ kg ; r_T = 6370 km.

a) O valor da gravidade :



$$g_{hT} = \frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)^2} \rightarrow g_{hT} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3)^2} \rightarrow \boxed{g_{hT} = 8,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

b) A enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e a potencial.

$$E_{\text{mecánica}} = E_k + E_P = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{2 \cdot (r_T + h)}$$

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{2 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 400 \cdot 10^3)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}} = -5,89 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

c) Aplicando o principio de conservación da enerxía ó momento do lanzamento:

$$E_m = \frac{m\, v_{\text{comunicada}}^2}{2} - \frac{G\, m_T\, m}{r_T}$$

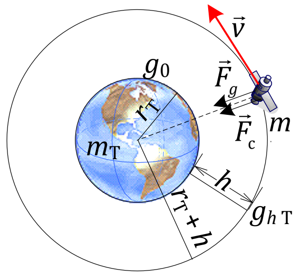
$$-5,89 \cdot 10^9 = \frac{200 \cdot v_{\text{comunicada}}^2}{2} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{6370 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{v_{\text{comunicada}} = 8,15 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

19. Un satélite cunha masa de 300 kg móvese nunha órbita circular a 5·10 ⁷ m por enriba da superficie terrestre.

a) Cal é a forza da gravidade sobre o satélite?
b) Cal é o período do satélite?
c) Cal é a enerxía mecánica do satélite na órbita?

Datos: g_0 = 9,81 m·s⁻²; r_T = 6370 km.

a) Calculamos o valor do módulo da forza de atracción gravitatoria:



b) $$\vec{F}_{\text{Terra-satélite}} = m_{\text{satélite}} \cdot \vec{g}_{\text{Terra á altura } h}$$

$$\left.\begin{aligned} g_h &= \frac{G \cdot m_T}{(r_T + h)^2} \\ g_0 &= \frac{G \cdot m_T}{r_T^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow g_h = \frac{g_0 \cdot r_T^2}{(r_T + h)^2}$$

$$F_{\text{peso}} = 300 \cdot \frac{9{,}81 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7)^2} \rightarrow \boxed{F_{\text{peso}} = 37{,}58\ \text{N}}$$

c) Para o satélite que orbita a forza centrípeta é igual á forza gravitatoria antes calculada.

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{(r_T + h)} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi (r_T + h)}{v}$$

$$F_{\text{peso}} = F_{\text{centrípeta}} \rightarrow F_{\text{peso}} = m \cdot \frac{v^2}{(r_T + h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{F_{\text{peso}} \cdot (r_T + h)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{37{,}58 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7)}{300}} \rightarrow v = 2657{,}3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (r_T + h)}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot (6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7)}{2657{,}3} \rightarrow \boxed{T = 1{,}33 \cdot 10^5\ \text{s}}$$

d) Enerxía mecánica:

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{mecánica}} &= E_k + E_P = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{2 \cdot (r_T + h)} \\ G \cdot m_T &= g_{0T} \cdot r_T^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{\text{mecánica}} = -\frac{g_{0T} \cdot r_T^2 \cdot m}{2 \cdot (r_T + h)}$$

$$E_{\text{mecánica}} = -\frac{9{,}81 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot 300}{2 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}} = -1{,}06 \cdot 10^9\ \text{J}}$$

20. Un astronauta de 75 kg xira nun satélite artificial onde a súa órbita dista *h* da superficie da Terra. Calcula:

a) O período de dito satélite.
b) A forza gravitatoria sobre dito astronauta.
c) A Enerxía mecánica do astronauta.

Datos: g_{0T} = 9,81 m·s⁻²; $h = r_T$ = 6370 km.

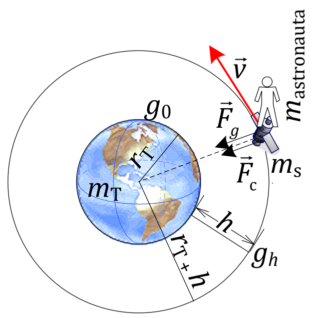
a) O período do satélite calculase a partir da velocidade orbital:

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega=\dfrac{v}{(r_T+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{2\pi\cdot(r_T+h)}{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_g=F_c \rightarrow v=\sqrt{\dfrac{G\cdot m_T}{(r_T+h)}} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{g_{0T}\cdot r_T^2}{(r_T+h)}}$$

$$\rightarrow T=\frac{2\pi\cdot\sqrt{(r_T+h)^3}}{\sqrt{g_{0T}\cdot r_T^2}}$$

$$T=\frac{2\pi\cdot\sqrt{(6370\cdot 10^3+6370\cdot 10^3)^3}}{\sqrt{9{,}81\cdot(6370\cdot 10^3)^2}} \rightarrow \boxed{T=1{,}43\cdot 10^4\ \text{s}}$$



b) Cálculo da forza gravitatoria sobre o astronauta:

$$\left.\begin{array}{l} F_g=m_{\text{astronauta}}\cdot g_h \\ \left.\begin{array}{l} g_h=\dfrac{G\cdot m_T}{(r_T+h)^2} \\ g_0=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T^{\ 2}} \end{array}\right\} \rightarrow g_h=\dfrac{g_0\cdot r_T^2}{(r_T+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow F_g=m_{\text{astronauta}}\cdot\frac{g_{0T}\cdot r_T^2}{(r_T+h)^2}$$

$$F_g=75\cdot\frac{9{,}81\cdot(6370\cdot 10^3)^2}{(6370\cdot 10^3+6370\cdot 10^3)^2} \rightarrow \boxed{F_g=183{,}9\ \text{N}}$$

c) Enerxía mecánica:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica}}=E_k+E_P=-\dfrac{G\cdot m_T\cdot m_{\text{astronauta}}}{2\cdot(r_T+h)} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{mecánica}}=-\frac{g_{0T}\cdot r_T^2\cdot m_{\text{astronauta}}}{2\cdot(r_T+h)}$$

$$E_{\text{mecánica}}=-\frac{9{,}81\cdot(6370\cdot 10^3)^2\cdot 75}{2\cdot(6370\cdot 10^3+6370\cdot 10^3)} \rightarrow \boxed{E_{\text{mecánica}}=-1{,}18\cdot 10^9\ \text{J}}$$

21. Quérese poñer nunha órbita de raio $r = 5 \cdot r_T/3$ un satélite artificial de masa 10 kg, sendo r_T = 6370 km. Calcula:

a) A velocidade de lanzamento.
b) A enerxía total do mesmo.
c) A velocidade de escape dende a Terra.

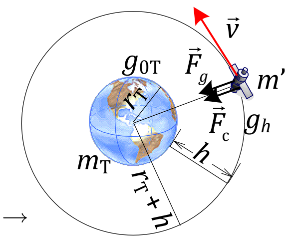
Dato: g_{0T} = 9,81 m·s⁻².

a)

$$E_{\text{m na órbita}} = E_{\text{k de lanzamento}} + E_{\text{P do punto de lanzamento na superficie da Terra}}$$

$$\left.\begin{array}{r} E_{\text{m órbita}} = \left(E_k + E_P\right)_{\text{órbita}} = -\dfrac{G\, m_T\, m'}{2\left(r_T + h\right)} \\ G\, m_T = g_{0T}\, r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{m órbita}} = -\dfrac{g_{0T}\, r_T^2\, m'}{2\left(r_T + h\right)}$$

$$\left.\begin{array}{r} E_{\text{m lanzamento}} = \left(E_k + E_P\right)_{\text{lanzamento}} = -\dfrac{G\, m_T\, m'}{r_T} + \dfrac{m'\, v^2}{2} \\ G\, m_T = g_{0T}\, r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{m lanzamento}} = -\dfrac{g_{0T}\, r_T^2\, m'}{r_T} + \dfrac{m'\, v^2}{2}$$



$$-\frac{g_{0T} \cdot r_T^2 \cdot m'}{2 \cdot \left(r_T + h\right)} = -\frac{g_{0T} \cdot r_T^2 \cdot m'}{r_T} + \frac{m' \cdot v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{g_{0T} \cdot r_T^2 \cdot \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{2 \cdot \left(r_T + h\right)}\right) \cdot 2}$$

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)}\right) \cdot 2} \rightarrow \boxed{v = 9{,}35 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) Como xa vimos, a enerxía total na órbita será:

$$\left.\begin{array}{r} E_{\text{m órbita}} = -\dfrac{G \cdot m_T \cdot m'}{2 \cdot \left(r_T + h\right)} \\ G \cdot m_T = g_{0T} \cdot r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{m órbita}} = -\frac{g_{0T} \cdot r_T^2 \cdot m'}{2 \cdot \left(r_T + h\right)}$$

$$E_{\text{m órbita}} = -\frac{9{,}81 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2 \cdot 10}{2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 6370 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{E_{\text{m órbita}} = -1{,}88 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

c) A velocidade de escape dende a superficie da Terra determínase por aplicación do principio de conservación da enerxía mecánica: $E_{\text{mecánica superficie Terra}} = E_{\text{mecánica } \infty}$:

$$\left.\begin{array}{r} E_{\text{pTerra}} + E_{\text{k Terra}} = E_{\text{p}\infty} + E_{\text{k}\,\infty} \rightarrow -\dfrac{G \cdot m_T \cdot m'}{r_T} + \dfrac{1}{2} \cdot m' \cdot v_{\text{escape}}^2 = 0 \rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot G \cdot m_T}{r_T}} \\ G \cdot m_T = g_{0T} \cdot r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot g_{0T} \cdot r_T}$$

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)} \rightarrow \boxed{v_{\text{escape}} = 1{,}12 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

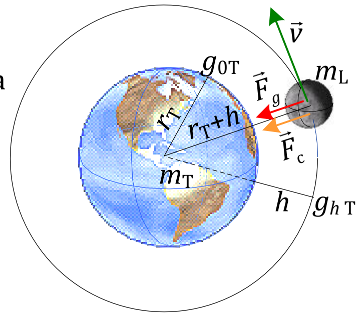
22. Se o raio da Lúa é unha cuarta parte do da Terra, calcula:

a) A súa masa.
b) O raio da órbita arredor da Terra.
c) A velocidade orbital da Lúa.

Datos: $g_{0\,L}$ = 1,7 m·s⁻²; $g_{0\,T}$ = 9,8 m·s⁻² ; m_T = 5,98·10²⁴ kg; r_T = 6370 km; $T_{\text{Lúa arredor da Terra}}$ = 2,36·10⁶ s.

a) Relacionando a intensidade do campo gravitatorio da Lúa e da Terra na súas respectivas superficies resulta:

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\,L}=\dfrac{G\cdot m_L}{r_L^2} \\ g_{0\,T}=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T^2}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_{0\,L}}{g_{0\,T}}=\frac{m_L}{m_T}\cdot\frac{r_T^2}{r_L^2} \rightarrow \frac{1{,}7}{9{,}8}=\frac{m_L}{5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot\frac{r_T^2}{\left(\dfrac{r_T}{4}\right)^2} \rightarrow \boxed{m_L=6{,}48\cdot 10^{22}\ \text{kg}}$$



b) A forza centrípeta que fai variar a dirección da velocidade do satélite é a forza gravitatoria que exerce a Terra sobre o satélite a esa distancia do seu centro: $\vec{F}_g=\vec{F}_c$.

$$\left.\begin{array}{r} m_L\cdot g_{hT}=m_L\cdot a_c \\ g_{hT}=\dfrac{G\,m_T}{(r_T+h)^2} \\ a_c=\dfrac{v^2}{(r_T+h)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{G\,m_T}{(r_T+h)^2}=\dfrac{v^2}{(r_T+h)} \rightarrow v^2=\dfrac{G\,m_T}{r_T+h} \\ v=\dfrac{s}{t}\rightarrow v=\dfrac{2\,\pi\,(r_T+h)}{T}\end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{2\,\pi\,(r_T+h)}{T}\right)^2=\frac{G\,m_T}{r_T+h}$$

$$\left.\begin{array}{r} r_T+h=\sqrt[3]{\dfrac{G\cdot m_T\cdot T^2}{4\,\pi^2}} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2\end{array}\right\} \rightarrow r_T+h=\sqrt[3]{\frac{g_{0T}\cdot r_T^2\cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$r_T+h=\sqrt[3]{\frac{9{,}8\cdot(6370\cdot 10^3)^2\cdot(2{,}36\cdot 10^6)^2}{4\,\pi^2}} \rightarrow \boxed{r_T+h=3{,}83\cdot 10^8\ \text{m}}$$

c) Para o cálculo da velocidade orbital partimos da expresión vista anteriormente: $v^2=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T+h}$.

$$\left.\begin{array}{l} v^2=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T+h} \\ G\cdot m_T=g_{0T}\cdot r_T^2\end{array}\right\} \rightarrow v^2=\frac{g_{0T}\cdot r_T^2}{r_T+h}$$

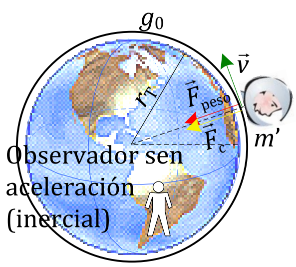
$$v=\sqrt{\frac{9{,}8\cdot(6370\cdot 10^3)^2}{3{,}83\cdot 10^8}} \rightarrow \boxed{v=1{,}02\cdot 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

23. Calcula:

a) A enerxía cinética que debería ter unha persoa de 70 kg para orbitar arredor da Terra a unha altura 0.
b) Canta enerxía sería necesaria para elevala a unha órbita estable a 6 370 km de altura?
c) Cal sería o valor da gravidade a esa altura.

Datos: r_T : 6370 km; G = 6,67· 10^{-11} N·m²·kg⁻²; m_T = 5,98·10^{24} kg.

a) Para que a persoa dera voltas sen caer, visto desde un sistema de referencia inercial, a forza do seu peso tería que coincidir coa súa forza centrípeta.



$$\left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{1}{2} \cdot m' \cdot v^2 \\ m' \cdot g_0 = m' \cdot a_c \rightarrow G \dfrac{m_T \cdot m'}{r_T^2} = \dfrac{m' \cdot v^2}{r_T} \rightarrow v^2 = G \cdot \dfrac{m_T}{r_T} \end{array}\right\} \rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m' \cdot G \cdot \frac{m_T}{r_T}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{E_k = 2{,}19 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

b) O campo gravitatorio é conservativo, conservándose a enerxía mecánica:

$$E_{\text{mecánica na Terra}} = E_{\text{mecánica na órbita}} \rightarrow E_{\text{k na Terra}} + E_{\text{p na Terra}} = E_{\text{mecánica na órbita}}$$

$$E_{\text{k na Terra}} = E_{\text{mecánica na órbita}} - E_{\text{p na Terra}} \rightarrow E_{\text{k na Terra}} = -\frac{G \cdot m_T \cdot m'}{2 \cdot (r_T + r_T)} - \left(-\frac{G \cdot m_T \cdot m'}{r_T}\right)$$

$$E_{\text{k T}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 70}{2 \cdot (6370 \cdot 10^3 + 6370 \cdot 10^3)} - \left(-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 70}{6370 \cdot 10^3}\right) \rightarrow \boxed{E_{\text{k T}} = 3{,}29 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

c) A gravidade nese punto será:

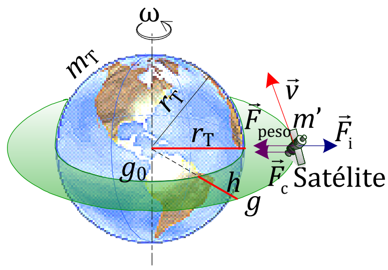
$$g = \frac{G \cdot m_T}{(r_T + r_T)^2} \rightarrow g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3 + 6370 \cdot 10^3)^2} \rightarrow \boxed{g = 2{,}46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

24. Calcula:

a) A velocidade que leva na súa órbita un satélite xeoestacionario.
b) A distancia do centro da Terra á que se atopa.
c) Se fora lanzado cun canon dende a Terra, desprezando o rozamento atmosférico, calcula a velocidade de lanzamento necesaria.

Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻² ; m_T = 5,98·10²⁴ kg ; r_T = 6370 km.

a) Un satélite xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa que $F_{peso} = F_{centrípeta} = F_{inercia}$, ten un período de revolución $T_{satélite}$, que coincide co da Terra, T_{Terra}: $T_{satélite} = T_{Terra}$, xa que está sempre sobre o mesmo punto da vertical terrestre.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{m'\cdot v^2}{r_T+h}=m'\cdot\dfrac{G\cdot m_T}{(r_T+h)^2}\rightarrow v^2=\dfrac{G\cdot m_T}{r_T+h}\\ v=\dfrac{2\pi(r_T+h)}{T}\rightarrow(r_T+h)=\dfrac{v\cdot T}{2\pi}\end{array}\right\}\rightarrow v^2=\dfrac{G\cdot m_T}{\dfrac{v\cdot T}{2\pi}}\rightarrow v=\sqrt[3]{\dfrac{2\pi\,G\cdot m_T}{T}}$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{2\cdot\pi\cdot G\cdot m_T}{T}}\rightarrow v=\sqrt[3]{\frac{2\cdot\pi\cdot 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot10^{24}}{86400}}\rightarrow\boxed{v=3{,}07\cdot10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

b) A distancia á que se atopa

$$v=\frac{2\pi\cdot(r_T+h)}{T}\rightarrow(r_T+h)=\frac{v\cdot T}{2\pi}\rightarrow(r_T+h)=\frac{3{,}07\cdot10^3\cdot86400}{2\pi}\rightarrow\boxed{(r_T+h)=4{,}22\cdot10^7\ \mathrm{m}}$$

c) Da igualdade $E_{\text{mecánica na superficie da Terra}}=E_{\text{mecánica na órbita}}$ obtemos a $E_{\text{k na superficie da Terra}}$, a partir da cal calculamos a velocidade de lanzamento do satélite, non tendo en conta neste cálculo a velocidade que xa posúe o satélite debido á rotación da Terra.

$$E_{\text{k na superficie da Terra}}=E_{\text{mecánica na órbita}}-E_{\text{p na superficie da Terra}}\rightarrow E_{\text{k na superficie da Terra}}=-\frac{G\cdot m_T\cdot m'}{2\cdot(r_T+h)}-\left(-\frac{G\cdot m_{Terra}\cdot m'}{r_T}\right)$$

$$E_{\text{k superf. Terra}}=-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot m'}{2\cdot4{,}22\cdot10^7}-\left(-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot m'}{6370\cdot10^3}\right)\rightarrow E_{\text{k superf. Terra}}=5{,}79\cdot10^7\cdot m'\ \mathrm{J}$$

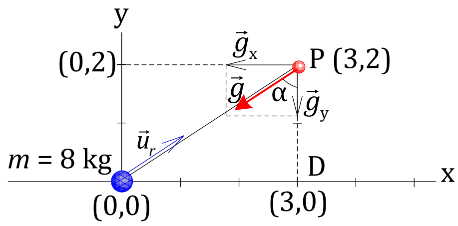
$$\left.\begin{array}{l}E_{\text{k na superf. da Terra}}=\dfrac{1}{2}\cdot m'\cdot v_{\text{na superf. da Terra}}\\ E_{\text{k na superf. da Terra}}=5{,}79\cdot10^7\cdot m'\ \mathrm{J}\end{array}\right\}\rightarrow 5{,}79\cdot10^7\cdot m'=\frac{1}{2}\cdot m'\cdot v^2_{\text{superf. da Terra}}\rightarrow\boxed{v_{\text{lanzamento}}=1{,}08\cdot10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

25. Unha masa de 8 kg está situada na orixe de coordenadas. Calcula:

a) A intensidade e o potencial do campo gravitatorio no punto (3,2) (SI).
b) A forza con que atraería a unha masa de 2 kg sita no punto (3,2).
c) O traballo realizado pola forza gravitatoria ao trasladar a masa de 2 kg dende o infinito ata o punto (3,2).

Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻².

a) Calculamos a intensidade $\vec{g}$ en (3,2):



$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{8}{\left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^2} \rightarrow g = 4{,}11 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_x = g \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow g_x = 4{,}11 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow g_x = 3{,}42 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

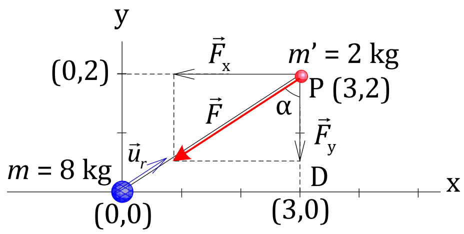
$$g_y = g \cdot \cos\alpha \rightarrow g_y = 4{,}11 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \rightarrow g_y = 2{,}28 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y \rightarrow \vec{g} = -3{,}42 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} - 2{,}28 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\ \left(\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}\right)$$

Potencial gravitatorio V en (3,2):

$$V = -G \cdot \frac{m}{r} \rightarrow V = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{8}{\sqrt{3^2+2^2}} \rightarrow \boxed{V = -1{,}48 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

b) Forza $\vec{F}$ sobre unha masa de 2 kg:



$$\vec{F} = m' \cdot \vec{g}$$

$$\vec{F} = 2 \cdot \left(-3{,}42 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} - 2{,}28 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(-6{,}84 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} - 4{,}56 \cdot 10^{-11}\ \vec{j}\right)(\text{N})}$$

$$\left|\vec{F}\right| = 8{,}22 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$$

c) Traballo para trasladar a masa dende o infinito ata o punto (3,2):

$$W_\infty^\text{P} = -\Delta E_\text{P} = -m \cdot \Delta V = -m \cdot \left(V_\text{P} - V_\infty\right) \rightarrow W_\infty^\text{P} = -2 \cdot \left(-1{,}48 \cdot 10^{-10} - 0\right) \rightarrow \boxed{W_\infty^\text{P} = 2{,}96 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}$$

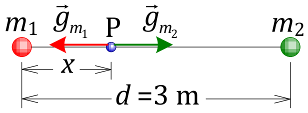
Como o traballo é positivo, as forzas do campo gravitatorio realizan o traballo de forma espontánea.

26. Dúas partículas de masas m_1 e m_2, sendo $m_2 = 9\ m_1$, están separadas unha distancia d =3 m. No punto P, situado entre elas, a intensidade de campo gravitatorio total creado por estas partículas é nulo.

a) Calcula a distancia x entre P e m_1.
b) Calcula o valor do potencial gravitatorio no punto P en función de m_1.
c) Explica o concepto de intensidade de campo gravitatorio creado por unha ou varias partículas.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Distancia entre P e m_1.



Ó ser varias masas, a intensidade de campo gravitatorio total, $\vec{g}_{\text{total}}$, obtense aplicando o principio de superposición: $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$. Para que $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{0}$ ten que ocorrer que $\vec{g}_{m_1} = -\vec{g}_{m_2}$:

$$g_{m_1} = g_{m_2} \rightarrow \frac{G \cdot m_1}{x^2} = \frac{G \cdot 9\,m_1}{(3-x)^2} \rightarrow 9\,x^2 = (3-x)^2 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0{,}75\ \text{m}} \\ x = -\ \cancel{1},\cancel{2}\cancel{5}\ \text{m} \end{cases}$$

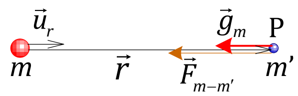
b) Potencial gravitatorio en P:

$$V_{\text{P}} = V_{1\text{ en P}} + V_{2\text{ en P}} = -G \cdot \frac{m_1}{r_{1-\text{P}}} + \left(-G \cdot \frac{m_2}{r_{2-\text{P}}}\right)$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_1}{0{,}75} + \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9\,m_1}{2{,}25}\right) \rightarrow \boxed{V = -3{,}56 \cdot 10^{-10} \cdot m_1\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

c) A intensidade de campo gravitatorio $\vec{g}$ nun punto P creada por unha masa m representa a forza gravitatoria que esa masa m exerce sobre a unidade de masa colocada nese punto.

$$\left.\begin{aligned} \vec{g}_{\text{de } m \text{ en P}} &= \frac{\vec{F}_{m-m'}}{m'} \\ \vec{F}_{m-m'} &= -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{g}_{\text{de } m \text{ en P}} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r \ (\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}, \text{no SI})$$



d) Onde $\vec{u}_r$ representa un vector unitario con dirección da recta que vai dende o centro da masa m que crea o campo cara ó punto P, onde se estuda $\vec{g}$, co sentido que vai da masa ao punto. O signo negativo representa o carácter atractivo do campo gravitatorio.

Cando son varias as masas que están producindo un campo gravitatorio en P, o campo resultante, $\vec{g}_{\text{total}}$, obtense por aplicación do principio de superposición: suma vectorial das intensidades de cada un dos campos individuais creados en ese punto por cada unha das masas.

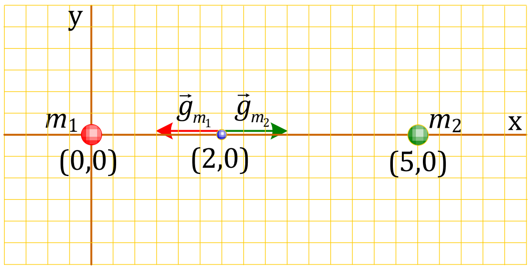
$$\vec{g}_{\text{P}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \cdots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_{\text{i}} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(-G \cdot \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_r\right) (\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}, \text{no SI})$$

27. Un obxecto de masa m_1 está situado na orixe de coordenadas, e un segundo obxecto está no punto coordenadas (5,0) m. Considerando unicamente a interacción gravitatoria e supoñendo que son masas puntuais, calcula:

a) A relación entre as masas m_1/m_2 se o campo gravitatorio no punto (2, 0) m é nulo.
b) O módulo, dirección e sentido do momento angular da masa m_2 con respecto da orixe de coordenadas se m_2 = 100 kg e a súa velocidade é (0,100) m·s⁻¹.
c) O valor do potencial gravitatorio no punto (2,2).

Dato: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

a) Relación entre masas m_1/m_2:

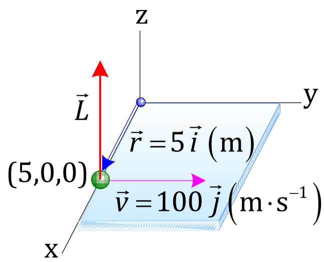


Ó ser dúas masas, para coñecer a intensidade de campo gravitatorio total, $\vec{g}_{\text{total}}$, aplicamos o principio de superposición: $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_{m_1} + \vec{g}_{m_2}$. Para que $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{0}$ ten que ocorrer que $\vec{g}_{m_1} = -\vec{g}_{m_2}$. Calculamos a relación m_1/m_2 para que, nesa posición das masas, se cumpra tal condición.

$$g_{m_1} = g_{m_2} \rightarrow \frac{G\,m_1}{2^2} = \frac{G\,m_2}{3^2} \rightarrow 9\,m_1 = 4\,m_2 \rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{9}}$$

b) Momento angular $\vec{L}$ en (5,0,0):

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}_2 = \vec{r}\times\left(m_2\,\vec{v}\right) \rightarrow \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 100\cdot 0{,}100 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{L} = 50\,\vec{k}\left(\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}\right)}$$



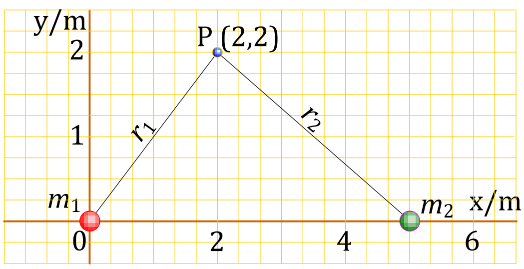
Chegamos ó mesmo resultado de $\vec{L}$ estudando o seu módulo, a súa dirección e o seu sentido:

Módulo: $|\vec{L}| = r\cdot m_2\cdot v\cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow |\vec{L}| = 5\cdot 100\cdot 100\cdot \text{sen}\,90^\circ \rightarrow |\vec{L}| = 5\cdot 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

Dirección: a perpendicular ó plano determinado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$, que é o plano (x,y), sendo a do eixe z.

Sentido: o de avance dun sacarrollas que xire levando $\vec{r}$ sobre $\vec{v}$ polo camiño máis curto, sendo o sentido positivo.

Con todo isto resulta: $\boxed{\vec{L} = 5\cdot 10^4\,\vec{k}\left(\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}\right)}$



c) Potencial gravitatorio V en (2,2):

$$V_P = V_{m_1\text{en P}} + V_{m_2\text{en P}} = -G\cdot\frac{m_1}{r_1} + \left(-G\cdot\frac{m_2}{r_2}\right)$$

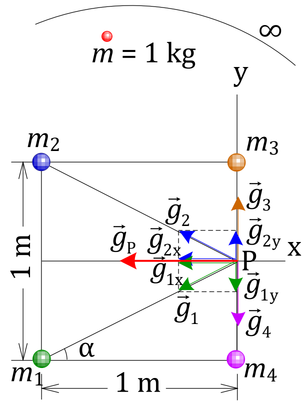
$$V_P = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{100\cdot\frac{4}{9}}{\sqrt{2^2+2^2}} + \left(-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{100}{\sqrt{3^2+2^2}}\right) \rightarrow \boxed{V_P = -2{,}90\cdot 10^{-9}\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}}$$

28. Sitúanse catro masas puntuais idénticas, de 5 kg cada unha, nos vértices dun cadrado de lado 1 m. Calcula:

a) A intensidade de campo gravitatorio creada polas catro masas no centro de cada lado do cadrado.
b) A intensidade de campo gravitatorio creada polas catro masas no centro do cadrado.
c) O traballo necesario para levar a unidade de masa dende o centro do cadrado ata un punto onde non existise atracción gravitatoria. Explica o significado físico deste resultado.

Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻².

a) Ó ser catro masas, para coñecer a intensidade de campo gravitatorio total, $\vec{g}_{\text{total}}$, aplicamos o principio de superposición: $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4$. De acordo co esquema da figura, as intensidade de campo gravitatorio no punto P creadas polas masas 3 e 4 anúlanse, por ser de sentido contrario.



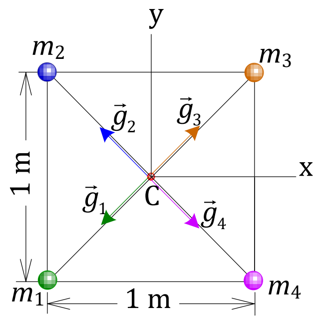
$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$g_{1\text{ en P}} = g_{2\text{ en P}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5}{\left(\sqrt{1^2 + 0{,}5^2}\right)^2} \rightarrow g_{1\text{ en P}} = g_{2\text{ en P}} = 2{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\vec{g}_{\text{p}} = \vec{g}_{1\text{P}} + \vec{g}_{2\text{P}} = -g_{1\text{P}} \cdot \cos\alpha\, \vec{i} + \left(-g_{2\text{P}} \cdot \cos\alpha\, \vec{i}\right)$$

$$\vec{g}_{\text{p}} = -2{,}67 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0{,}5^2}}\, \vec{i} + \left(-2{,}67 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0{,}5^2}}\, \vec{i}\right) \rightarrow \boxed{\vec{g}_{\text{p}} = -4{,}78 \cdot 10^{-10}\, \vec{i}\ \left(\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}\right)}$$

b) Dado que as catro masas son iguais e están á mesma distancia, a intensidade de campo gravitatorio no centro do cadrado é nula:



$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4 = \vec{0}.$$

c) Traballo para levar a unidade de masa dende o centro do cadrado ata o infinito:

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{C}}^{\infty} = -\Delta E_{\text{p}} = -m \cdot \Delta V = -m \cdot \left(V_{\infty} - V_{\text{C}}\right) \\ V_{\infty} = 0\ \text{V} \\ \left.\begin{array}{l} V_{\text{total en C}} = \sum_{i=1}^{i=4} V_i = -\sum_{i=1}^{i=4} \frac{G \cdot m_i}{r_i} \\ V_{\text{total en C}} = 4 \cdot \left(-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}}\right) \end{array}\right\} \rightarrow V_{\text{total en C}} = -1{,}89 \cdot 10^{-9}\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$W_{\text{C}}^{\infty} = -1 \cdot \left[0 - \left(-1{,}89 \cdot 10^{-9}\right)\right] \rightarrow \boxed{W_{\text{C}}^{\infty} = -1{,}89 \cdot 10^{-9}\ \text{J}}$$

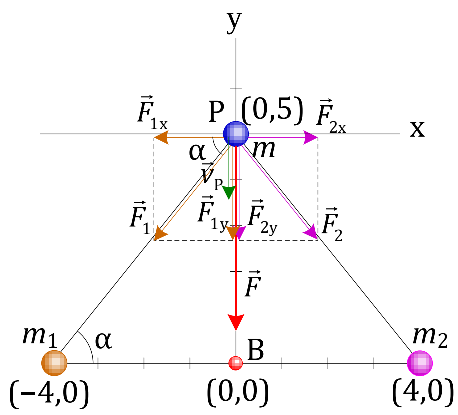
Como o traballo é negativo, as forzas do campo gravitatorio realizan o trabalo non de forma espontánea, senón como consecuencia dunha forza exterior aplicada.

29. Unha masa m (1000 kg) móvese no campo gravitatorio creado por dúas masas iguais, m_1 e m_2 ($m_1 = m_2 = 1{,}0\cdot 10^{24}$ kg), situadas nos puntos (–4,0) e (4,0) (coordenadas no SI). Cando m se atopa no punto P (0,5) m ten unha velocidade de $-200\,\vec{j}\,\left(\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)$. Calcula:

a) O módulo, dirección e sentido da forza que actúa sobre m en P.
b) O módulo da velocidade de m cando pasa polo punto B (0,0).

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$.

a) Cálculo da forza en P.



$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{\text{i}} = \sum_{i=1}^{i=n} -\frac{G\cdot m_{\text{i}}\cdot m}{r^2}\cdot \vec{u}_{r_i}$$

$$F_{m_1\,(0,5)} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{\left(\sqrt{5^2+4^2}\right)^2} \rightarrow F_{m_1\,(0,5)} = 1{,}63\cdot 10^{15}\ \mathrm{N}$$

$$F_{m_2\,(0,5)} = F_{m_1\,(0,5)} = 1{,}63\cdot 10^{15}\ \mathrm{N}$$

$$F_{\text{total}\,(0,5)} = 2\cdot 1{,}63\cdot 10^{15}\cdot \frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}} \rightarrow \boxed{F_{\text{total}\,(0,5)} = 2{,}55\cdot 10^{15}\ \mathrm{N}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{total}\,(0,5)} = -2{,}55\cdot 10^{15}\,\vec{j}\,(\mathrm{N})}$$

b) A forza gravitatoria que actúa sobre a masa m ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como esta forza é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{P}}^{\text{B}} = \Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k B}} - E_{\text{k P}} \\ W_{\text{P}}^{\text{B}} = -\Delta E_{\text{p}} = -\left(E_{\text{p B}} - E_{\text{p P}}\right) \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{k B}} - E_{\text{k P}} = -\left(E_{\text{p B}} - E_{\text{p P}}\right) \rightarrow E_{\text{k B}} + E_{\text{p B}} = E_{\text{k P}} + E_{\text{p P}}$$

$$E_{\text{p P}} = -\frac{G\cdot m_1\cdot m}{r_{1\text{P}}} - \frac{G\cdot m_2\cdot m}{r_{2\text{P}}} \rightarrow E_{\text{p P}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{\sqrt{5^2+4^2}} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{\sqrt{5^2+4^2}}$$

$$E_{\text{p P}} = -2{,}08\cdot 10^{16}\ \mathrm{J}$$

$$E_{\text{p B}} = -\frac{G\cdot m_1\cdot m}{r_{1\text{B}}} - \frac{G\cdot m_2\cdot m}{r_{2\text{B}}} \rightarrow E_{\text{p B}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{4} - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{4}$$

$$E_{\text{p B}} = -3{,}34\cdot 10^{16}\ \mathrm{J}$$

$$E_{\text{k P}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{\text{P}}^2 \rightarrow E_{\text{k P}} = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 200^2 \rightarrow E_{\text{k P}} = 2{,}00\cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

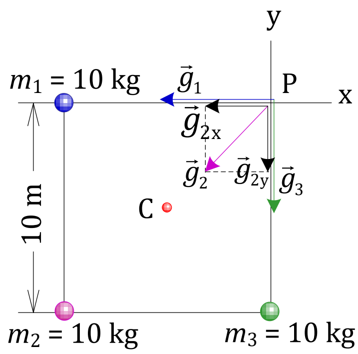
$$E_{\text{k B}} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{\text{B}}^2 \rightarrow E_{\text{k B}} = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot v_{\text{B}}^2 \rightarrow E_{\text{k B}} = 500{,}00\cdot v_{\text{B}}^2\ \mathrm{J}$$

$$E_{\text{k B}} + E_{\text{p B}} = E_{\text{k P}} + E_{\text{p P}} \rightarrow 500{,}00\cdot v_{\text{B}}^2 + \left(-3{,}34\cdot 10^{16}\right) = 2{,}00\cdot 10^7 + \left(-2{,}08\cdot 10^{16}\right) \rightarrow \boxed{v = 5{,}02\cdot 10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

30. En tres dos catro vértices dun cadrado de 10 m de lado colócanse outras tantas masas de 10 kg. Calcula:

a) A intensidade de campo gravitatorio no cuarto vértice do cadrado.
b) O potencial gravitatorio no punto anterior.
c) O traballo realizado polo campo para levar unha masa de 10 kg dende dito vértice ata o centro do cadrado.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$.



a) A intensidade do campo gravitatorio $\vec{g}_i$ dunha masa m_i, nun punto situado a unha distancia r_i, vén dada pola expresión: $\vec{g}_i = -\frac{G \cdot m_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_r$, sendo G a constante de gravitación universal e $\vec{u}_r$ o vector unitario na dirección que une a masa m_i co punto onde se calcula $\vec{g}_i$ e co sentido que vai desde m_i ata o punto. Como son tres as masas creadoras de campo, a intensidade total obtense aplicando o principio de superposición: $\vec{g}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$.

$$g_1 = g_3 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{10^2} \rightarrow g_1 = g_3 = 6{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\left(\sqrt{10^2 + 10^2}\right)^2} \rightarrow g_2 = 3{,}34 \cdot 10^{-12}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_{2\text{x}} = g_{2\text{y}} = g_2 \cdot \cos 45° \rightarrow g_{2\text{x}} = g_{2\text{y}} = 3{,}34 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g_{2\text{x}} = g_{2\text{y}} = 2{,}36 \cdot 10^{-12}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_\text{x} = g_1 + g_{2\text{x}} \rightarrow g_\text{x} = 6{,}67 \cdot 10^{-12} + 2{,}36 \cdot 10^{-12} \rightarrow g_\text{x} = 9{,}03 \cdot 10^{-12}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$g_\text{y} = g_3 + g_{2\text{y}} = g_\text{x}$$

$$\boxed{\vec{g} = -9{,}03 \cdot 10^{-12}\ \vec{i} - 9{,}03 \cdot 10^{-12}\ \vec{j}\ (\text{N} \cdot \text{kg}^{-1})} \rightarrow g = 1{,}28 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

b) O potencial gravitatorio V nun punto debido á presenza de varias masas, m_i, cada unha delas á unha distancia r_i do punto, obtense sumando alxebricamente o potencial que cada unha das masas crea nese punto: $V = \sum_{i=1}^{i=3} V_\text{i} = \sum_{i=1}^{i=3}\left(-\frac{G \cdot m_i}{r_i}\right)$.

$$V_\text{P} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{10} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{10^2 + 10^2}} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{10} \rightarrow \boxed{V_\text{P} = -1{,}81 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

c) O traballo feito pola forza gravitatoria do campo cando a masa m de 10 kg se despraza desde o punto P ó punto C calcúlase pola variación da enerxía potencial que posúe a masa de 10 kg neses dous puntos

$$W_\text{P}^\text{C} = -\Delta E_\text{p} = -\Delta V \cdot m = -(V_\text{C} - V_\text{P}) \cdot m$$

$$V_\text{C} = -G \cdot \frac{m_1}{r_{1-\text{C}}} - G \cdot \frac{m_2}{r_{2-\text{C}}} - G \cdot \frac{m_3}{r_{3-\text{C}}}$$

$$V_\text{C} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{50}} + \frac{10}{\sqrt{50}} + \frac{10}{\sqrt{50}}\right) \rightarrow V_\text{C} = -2{,}83 \cdot 10^{10}\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} W_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}} = -(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{P}}) \cdot m \\ V_{\mathrm{C}} = -2{,}83 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}} \\ V_{\mathrm{P}} = -1{,}81 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}} \\ m = 10\ \mathrm{kg} \end{array}\right\} \rightarrow W_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}} = -\left(-2{,}83 \cdot 10^{-10} - \left(-1{,}81 \cdot 10^{-10}\right)\right) \cdot 10 \rightarrow \boxed{W_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}} = 1{,}02 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}}$$

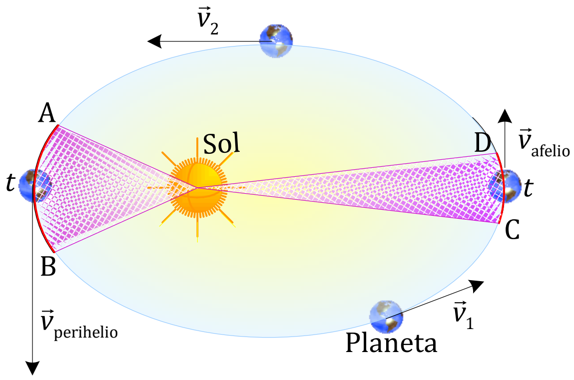
Como o traballo é positivo, as forzas do campo gravitatorio realizan o trabalo de forma espontánea.

GRAVITACIÓN. CUESTIÓNS

1. Un planeta xira arredor do Sol nunha traxectoria elíptica. Cal das seguintes magnitudes é maior no perihelio (distancia máis próxima ao Sol) que no afelio: a) o momento angular; b) o momento lineal; c) a enerxía mecánica.

SOL. **b**

Aplicamos a segunda lei de Kepler: o raio vector que une o centro do Sol co planeta barre áreas iguais en tempos iguais, polo que a velocidade no perihelio debe ser maior que no afelio. Isto vén a significar que se o tempo que lle leva ó planeta en ir de A a B é o mesmo que o de ir de C a D, cando o planeta está máis preto do Sol (perihelio) vai máis á presa que cando está máis afastado del (afelio).



Por esta razón, o momento lineal $(\vec{p}=m\cdot\vec{v})$ será maior no perihelio.

Tanto a enerxía mecánica como o momento angular son constantes.

2. Sabendo que a aceleración da gravidade nun movemento de caída libre na superficie da Lúa é 1/6 da aceleración da gravidade na superficie da Terra e que o raio da Lúa é aproximadamente 0,27 r_T; a relación entre as densidades medias da Lúa e da Terra será: a) ρ_L/ρ_T = 50/81; b) ρ_L/ρ_T = 8/200; c) ρ_L/ρ_T = 1/6.

SOL. **a**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\rho_L}{\rho_T}=\dfrac{\dfrac{m_L}{V_L}}{\dfrac{m_T}{V_T}}=\dfrac{\dfrac{m_L}{\frac{4}{3}\pi r_L^3}}{\dfrac{m_T}{\frac{4}{3}\pi r_T^3}}\\ r_L=0{,}27\,r_T\end{array}\right\}\rightarrow\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{\dfrac{m_L}{(0{,}27\,r_T)^3}}{\dfrac{m_T}{r_T^3}}=\frac{m_L}{m_T}\cdot\frac{r_T^3}{(0{,}27\,r_T)^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{g_L}{g_T}=\dfrac{\dfrac{G\cdot m_L}{r_L^2}}{\dfrac{G\cdot m_T}{r_T^2}}\\ g_L=\dfrac{g_T}{6}\\ r_L=0{,}27\,r_T\end{array}\right\}\rightarrow\frac{\dfrac{g_T}{6}}{g_T}=\frac{\dfrac{G\cdot m_L}{(0{,}27\,r_T)^2}}{\dfrac{G\,m_T}{r_T^2}}\rightarrow\frac{m_L}{m_T}=\frac{0{,}27^2}{6}$$

$$\rightarrow\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{0{,}27^2}{6}\cdot\frac{r_T^3}{(0{,}27\,r_T)^3}=\frac{50}{81}$$

3. Sabendo que a aceleración da gravidade nun movemento de caída libre na superficie de Marte é 0,38 veces a gravidade na superficie da Terra e que o raio de Marte é aproximadamente 0,53 r_{Terra}, a relación entre as velocidades de escape dun obxecto dende as súas respectivas superficies será: a) v_{eT}/v_{eM}= 4,96; b) v_{eT}/v_{eM}= 2,23; c) v_{eT}/v_{eM}= 0,45

SOL. **b**

Tendo en conta a expresión da velocidade de escape.

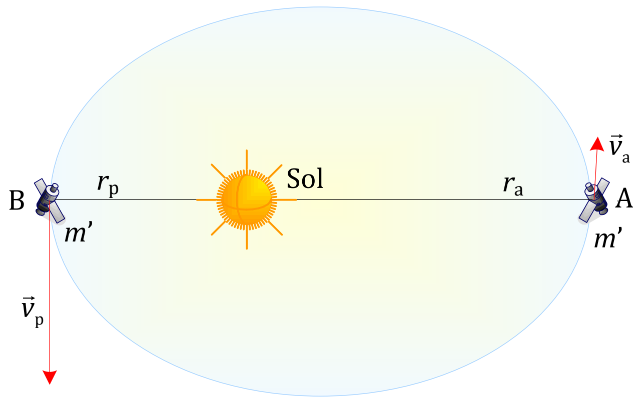
$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{v_{\mathrm{e\,T}}}{v_{\mathrm{e\,M}}}=\dfrac{\sqrt{2\cdot g_{0\mathrm{T}}\cdot r_{\mathrm{T}}}}{\sqrt{2\cdot g_{0\mathrm{M}}\cdot r_{\mathrm{M}}}}\\ g_{0\mathrm{M}}=0{,}38\cdot g_{0\mathrm{T}}\\ r_{\mathrm{M}}=0{,}53\cdot r_{\mathrm{T}}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{v_{\mathrm{e\,T}}}{v_{\mathrm{e\,M}}}=\sqrt{\frac{2\cdot g_{0\mathrm{T}}\cdot r_{\mathrm{T}}}{2\cdot 0{,}38\cdot g_{0\mathrm{T}}\cdot 0{,}53\cdot r_{T}}}\rightarrow \frac{v_{\mathrm{e\,T}}}{v_{\mathrm{e\,M}}}=2{,}23$$

4. Os cometas describen órbitas elípticas moi alongadas arredor do Sol, de maneira que a distancia ao Sol varía moito. Cal das seguintes magnitudes é maior no punto máis afastado ao Sol: a) enerxía cinética; b) enerxía potencial; c) momento angular.

SOL. **b**

A enerxía potencial E_p, $E_{\mathrm{p}}=\dfrac{-G\cdot m\cdot m'}{r}$, aumenta coa distancia xa que é negativa, e canto máis grande sexa r máis se aproxima a 0. Aínda que o seu valor absoluto é menor, por estar afectado polo carácter negativo, a enerxía potencial é maior nos puntos máis afastados.

Así, no punto A a enerxía potencial gravitatoria é maior que en B.



5. A seguinte táboa relaciona o período e o raio das órbitas de tres satélites xirando arredor do mesmo astro.

Satélite	A	B	C
T/anos	0,44	1,00	3,86
$r\cdot 10^{-5}$/km	0,88	2,08	3,74

Sabemos que hai un dato incorrecto, xustifica a que satélite corresponde: a) ó A; b) ó B; c) ó C.

SOL. **b**

Se recordamos a terceira lei de Kepler, sabemos que o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un satélite en dar unha volta arredor do astro (período, T) e o cubo do semieixe maior da elipse que describe, r, (que, nunha aproximación circular, correspóndese co raio dunha circunferencia), é o mesmo para todos os planetas: T^2/r^3 = cte. Aplicando esta lei ós datos dos tres satélites resulta:

$$\frac{T^2_{\text{satélite A}}}{r^3_{\text{satélite A}}}=\frac{0{,}44^2}{\left(0{,}88\cdot 10^5\right)^3}\rightarrow \frac{T^2_{\text{satélite A}}}{r^3_{\text{satélite A}}}=0{,}284\cdot 10^{-15}\ \text{anos}^2\cdot\text{km}^{-3}$$

$$\frac{T^2_{\text{satélite B}}}{r^3_{\text{satélite B}}}=\frac{1{,}00^2}{\left(2{,}08\cdot 10^5\right)^3}\rightarrow \frac{T^2_{\text{satélite B}}}{r^3_{\text{satélite B}}}=0{,}111\cdot 10^{-15}\ \text{anos}^2\cdot\text{km}^{-3}$$

$$\frac{T^2_{\text{satélite C}}}{r^3_{\text{satélite C}}}=\frac{3{,}86^2}{\left(3{,}74\cdot 10^5\right)^3}\rightarrow \frac{T^2_{\text{satélite C}}}{r^3_{\text{satétlite C}}}=0{,}285\cdot 10^{-15}\ \text{anos}^2\cdot\text{km}^{-3}$$

Á luz destes resultados deducimos que o satélite que ten algún dato incorrecto corresponde a B.

6. Onde se atopará o punto no que se anulan as intensidades de campo gravitatorio da Lúa e da Terra?: a) no punto medio entre Terra e Lúa; b) máis cerca da Terra; c) máis cerca da Lúa.

SOL. **c**

Tendo en conta que nese punto o valor da intensidade de campo gravitatorio $\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ se anula; a intensidade do campo gravitatorio terrestre hai ser igual á da Lúa. Como a masa da Terra é moito maior que a da Lúa, este punto estará máis achegado á Lúa a máis afastado da Terra.

7. Se a Lúa reducise a súa masa á metade, a "Lúa chea" veríase: a) Con máis frecuencia que agora; b) Con menos frecuencia; c) Coa mesma frecuencia.

SOL. **c**

A partir da terceira lei de Kepler podemos chegar a unha expresión que relaciona o período de translación da Lúa T ó redor da Terra e o semieixe maior da elipse da órbita que describe r coa masa m que crea o campo gravitatorio no que se atopa a Lúa (m_{Terra}). A expresión é: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot m_{\mathrm{T}}}$.

Vemos que o período non depende da masa da Lúa; tan só depende da masa da Terra, polo que o non modificarse o período, tampouco o fai a frecuencia. A "Lúa chea" seguiríase vendo coa mesma frecuencia.

8. Cómo inflúe a dirección na que se lanza un obxecto na súa velocidade de escape?: a) non inflúe; b) a velocidade de escape é maior canto maior sexa ángulo de lanzamento; c) a velocidade de escape é menor canto menor sexa o ángulo de lanzamento.

SOL. **a**

A expresión da velocidade de escapa v_e dun obxecto lanzado desde a superficie da Terra, de masa m e raio r, é: $v_e = \sqrt{2 \cdot \frac{G \cdot m}{r}}$, sendo G a constante de gravitación universal. Se non temos en conta a enerxía cinética que xa posúe o obxecto debido á velocidade de rotación, temos que comunicarlle toda a v_e, polo que será a mesma independentemente do ángulo de lanzamento.

9. A que distancia fóra da superficie da Terra, medida desde o seu centro, o valor do campo gravitatorio é igual ó seu valor nun punto do interior da Terra, equidistante do centro e da superficie?: a) 6400 km; b) 9050 km; c)18100 km. Nota: toma r_{T} = 6400 km.

SOL. **b**

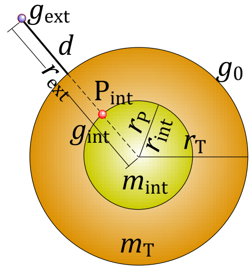
$$g_{ext} = g_{int}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{ext} = \dfrac{G \cdot m_T}{r_{ext}^2} \\ G \cdot m_T = g_0 \cdot r_T^2 \end{array}\right\} \rightarrow g_{ext} = \dfrac{g_0 \cdot r_T^2}{r_{ext}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{int} = \dfrac{G \cdot m_{int}}{r_{int}^2} = \dfrac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{int}^3}{r_{int}^2} = \text{cte} \cdot r_{int} \\ g_0 = \dfrac{G \cdot m_T}{r_T^2} = \dfrac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_T^3}{r_T^2} = \text{cte} \cdot r_T \end{array}\right\} \rightarrow g_{int} = g_0 \cdot \dfrac{r_{int}}{r_T}$$

$$\rightarrow \frac{g_0 \cdot r_T^2}{r_{ext}^2} = g_0 \cdot \frac{r_{int}}{r_T} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} r_{ext} = \sqrt{\dfrac{r_T^3}{r_{int}}} \\ r_{int} = \dfrac{r_T}{2} \end{array}\right\} \rightarrow r_{ext} = \sqrt{\dfrac{r_T^3}{\frac{r_T}{2}}} = \sqrt{2\, r_T^2} \\ r_T = 6400 \text{ km} \end{array}\right\} \rightarrow r_{ext} = 9051 \text{ km}$$



10. A que altitude, respecto á superficie da Terra, o peso G_h dun astronauta se reduce a metade? a) se h = 0,5 r_T; b) se h = 2 r_T ; c) se h = 0,41 r_T.

SOL. **c**

Tendo en conta a expresión para o campo gravitatorio terrestre en puntos afastados da súa superficie:

$$\left.\begin{array}{l} G_h = \dfrac{G_0}{2} \\ G_h = \dfrac{G \cdot m_T \cdot m}{(r_T + h)^2} \\ G_0 = \dfrac{G \cdot m_T \cdot m}{r_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{G \cdot m_T \cdot m}{(r_T + h)^2} = \frac{\frac{G \cdot m_T \cdot m}{r_T^2}}{2} \rightarrow \frac{1}{(r_T + h)^2} = \frac{1}{2\, r_T^2} \rightarrow (r_T + h)^2 = 2\, r_T^2 \rightarrow r_T + h = \sqrt{2}\, r_T$$

$$h = \sqrt{2}\, r_T - r_T \rightarrow h = 0{,}41\, r_T$$

11. Xustifica cal das seguintes afirmacións e verdadeira.
a) Un satélite de masa 2 m ten o dobre de velocidade de escape que outro de masa m.
b) Dous planetas de raios diferentes, coa mesma densidade, posúen a mesma velocidade de escape.
c) Un satélite terá a metade da velocidade de escape nun planeta de raio 4 r que noutro de raio r e a mesma masa.

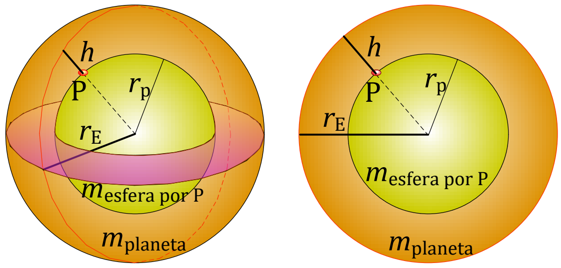
SOL. **c**

A partir da ecuación da velocidade de escape: $v_e = \sqrt{2 \cdot \dfrac{G \cdot m_{planeta}}{r_{planeta}}}$ pódese deducir que no caso do planeta de raio 4 r, a velocidade de escape é a metade que no planeta de raio r.

12. Como varía g ó afondar cara ó interior da Terra?: a) aumenta; b) diminúe; c) non varía.

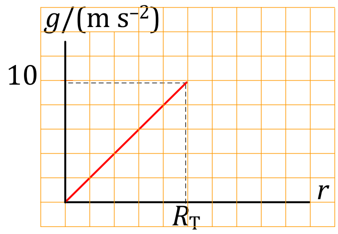
SOL. **b**

Supoñamos un punto P no interior da Terra, a unha profundidade h respecto á súa superficie.



A intensidade de campo gravitatorio no punto P vén dada pola expresión: $g = \dfrac{G \cdot m}{r^2}$, sendo m a masa da esfera que, tendo por centro ó da Terra, pasa polo punto onde queremos coñecer g. Como a medida que r diminúe tamén diminúe o valor de m, para saber como varía o valor de g con r imos expresar m en función de r. Con este fin recordamos que $m = \rho\, V$, sendo ρ a densidade da Terra, que ó considerala homoxénea ten un valor constante, e V o seu volume que, en función de r, é: $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. En consecuencia resulta: $m = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Substituíndo na expresión de g temos:

$$g = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{r^2} \rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r \rightarrow g = \text{cte} \cdot r$$



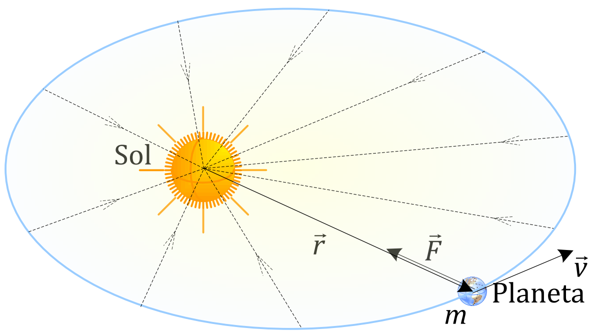
Vemos que o valor de g, para puntos interiores da Terra, aumenta de forma directamente proporcional co valor de r, correspondéndolle a representación gráfica que á marxe se indica.

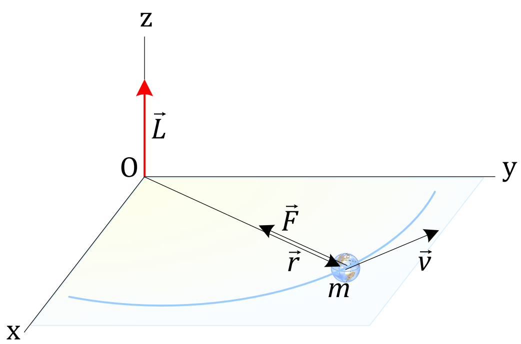
Para un punto P da superficie da Terra, r coincide co raio desta e g toma o valor máximo.

13. As órbitas planetarias son planas porque: a) os planetas teñen inercia; b) non varía o momento angular ó ser unha forza central; c) non varía o momento de inercia dos planetas no seu percorrido.

SOL.**b**

A forza que rexe o movemento planetario é unha forza central. E sabemos que o momento angular $\vec{L}$ dunha partícula m que se move baixo unha forza central, con respecto ó centro de forzas, se conserva: $\vec{L} = \overrightarrow{\text{cte}}$.





Como $\vec{L}$ é perpendicular ó plano determinado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o punto respecto ó cal se calcula $\vec{L}$ cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$; para que a súa dirección permaneza constante, o planeta ten que ter unha traxectoria plana, xa que senón $\vec{L}$ cambiaría de dirección.

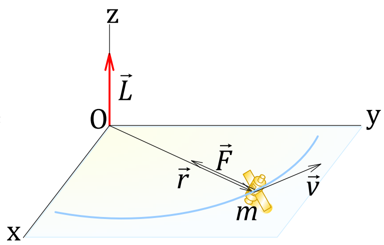
14. Unha partícula móvese dentro dun campo de forzas centrais. O seu momento angular respecto do centro de forzas: a) aumenta indefinidamente; b) é cero; c) permanece constante.

SOL. **c**

O momento angular $\vec{L}$ dunha partícula de masa *m*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, respecto a un punto O, vén dado pola expresión: $\vec{L}=\vec{r}\times(m\cdot\vec{v})$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o punto O cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$.

Para dicir se $\vec{L}$ aumenta indefinidamente, se é cero ou se permanece constante, imos estudar como é a súa variación no tempo:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d\left(\vec{r}\times(m\vec{v})\right)}{dt}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}\\ \dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\\ \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F}$$



Como o vector $(m\cdot\vec{v})$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v}\times(m\cdot\vec{v})=\vec{0}$. Por outro lado, como a partícula se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$ teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180°) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$. En consecuencia resulta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}\quad\rightarrow\quad\vec{L}=\overrightarrow{\text{cte}}$$

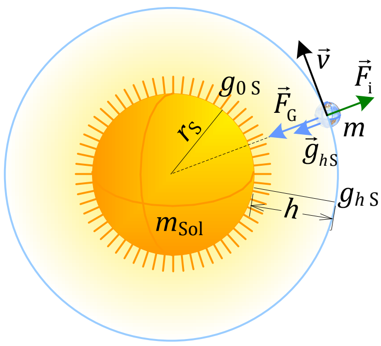
15 Se por unha causa interna, a Terra sufrira un colapso gravitatorio e reducira o seu raio mantendo constante a súa masa, como sería o período de revolución arredor do Sol?: a) igual; b) menor; c) maior.

SOL. **a**

Considerando que a Terra no seu movemento orbital arredor do Sol segue unha traxectoria circular, o movemento que posúe é circular uniforme e o seu período *T* de revolución pode calcularse da forma:

$$\left.\begin{array}{r}v_{\text{xiro Terra}}=\dfrac{s}{t}\rightarrow v_{\text{xiro Terra}}=\dfrac{2\pi\cdot(r_S+h)}{T}\rightarrow T=\dfrac{2\pi\cdot(r_S+h)}{v_{\text{xiro Terra}}}\\ v_{\text{xiro Terra}}=\sqrt{\dfrac{G\cdot m_{\text{Sol}}}{(r_S+h)}}\end{array}\right\}\rightarrow T=2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{(r_S+h)^3}{G\cdot m_{\text{Sol}}}}$$

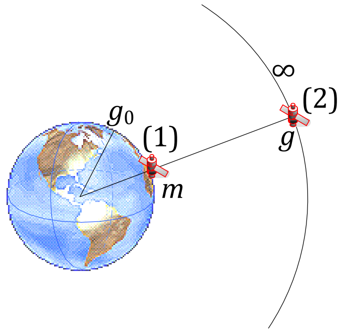
Se o raio da órbita permanece constante: o que diminúe r_T auméntao *h*, de modo que $r_S+h=$ cte; o período de rotación da Terra arredor do Sol permanece constante. A órbita da Terra ó redor do Sol non se ve alterada pola hipotética concentración de masa da Terra: Aínda que esta se converta en puntual, concentrándose no seu centro, non se altera a interacción gravitatoria Terra-Sol e, polo tanto, tampouco se alteran os efectos dinámicos ou de movemento da Terra.



En consecuencia, non haberá modificación ningunha no período de revolución da Terra ó redor do Sol.

16. A velocidade que se debe comunicar a un corpo na superficie da Terra para que escape da gravidade terrestre e se afaste para sempre debe ser: a) maior que $(2\, g_0\, r_T)^{1/2}$; b) menor que $(2\, g_0\, r_T)^{1/2}$; c) igual que $(g_0\, r_T)^{1/2}$.

SOL. **a**



Para conseguir que un corpo "escape" da atracción gravitatoria, deberemos comunicarlle unha enerxía que permita situalo nun punto no que non estea sometido a dita atracción. Isto ocorre a unha distancia "infinita" do centro da Terra e na que se cumpre que $E_T = 0$. Aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica a ambos puntos (codia terrestre e infinito) a velocidade que hai que comunicar será maior que $v_e = \sqrt{2\, g_0\, r_T}$.

$$E_{m1} = E_{m2} \quad \rightarrow \quad E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \left(-\frac{G \cdot m_T \cdot m}{r_T} \right) = 0 + 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\, G \cdot m_T}{r_T}} = v_e \\ g_0 = \frac{G \cdot m_T}{r_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow v_e = \sqrt{2\, g_0 \cdot r_T}$$

17. A forza gravitatoria é proporcional á masa do corpo. En ausencia de rozamento, que corpos caen máis rápido?: a) os de maior masa; b) os de menor masa; c) todos igual.

SOL. **c**

Todos caerían igual, porque aínda que a forza gravitatoria depende da atracción das masas, a intensidade do campo gravitatorio g medida como F/m, depende unicamente da masa creadora do campo, sendo independente da masa do obxecto que cae: $g = G\, m_{\text{creadora do campo}} / r^2$

Esta intensidade de campo gravitatorio é a que determina a aceleración de caída do corpo.

18. Se por unha causa interna, a Terra sufrira un colapso gravitatorio e reducira o seu raio a metade, mantendo constante a masa; como sería o período de revolución arredor do Sol?: a) igual; b) 2 anos; c) 4 anos.

SOL. **a**

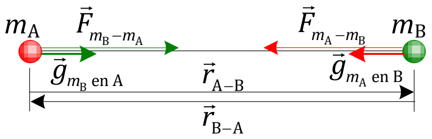
Utilizar o razoamento da cuestión 15.

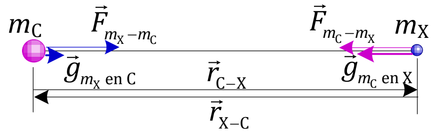
19. Sexan tres corpos iguais de gran masa, A, B, e C, e un de pequena masa, X. Se os dispoñemos A e B por unha beira e C e X por outra, cos centros igualmente separados: a) Achegáranse máis rápido A e B; b) Achegáranse máis rápido C e X; c) Achegáranse ambas parellas cunha mesma aceleración.

SOL.: **a**

Segundo a lei de gravitación universal, a forza de atracción gravitatoria entre dous corpos de masas m e m' é directamente proporcional ó produto das masas: $\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r$. En cambio, a aceleración que sofre cada un dos corpos é proporcional á masa do outro: $\vec{g}_{\text{de } m \text{ en } m'} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$.

Polo tanto, a aceleración de achegamento (suma das aceleracións de cada corpo independente) será maior se algunha das masas é maior, e o achegamento é máis rápido.





20. G e g son: a) g maior que G; b) Unha maior cá outra dependendo do lugar e campo dos que se parta; c) Non ten sentido facer unha comparación entre g e G.

SOL.: c

Non ten sentido a comparación xa que "g" representa a intensidade de campo gravitatorio (F/m), sendo unha constante non universal que depende da distancia ($g = G\,M\,m/r^2$); mentres que "G" é unha constante universal que non depende da natureza dos corpos que interaccionan e que toma o valor de $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. Representa a forza gravitatoria con que se atraen dous corpos de 1 kg de masa cada un, situados a 1 m de distancia.

21. Se un corpo situado nun campo gravitatorio posúe unha enerxía cinética E_K igual á súa enerxía potencial E_p (en valor absoluto), isto significa que: a) o corpo pode escapar ó infinito; b) o corpo rematará caendo sobre a masa que crea o campo; c) seguirá unha órbita circular.

SOL.: **a**

Tendo en conta o balance enerxético global: $E_{\text{mecánica}} = E_k + E_p = -\dfrac{G \cdot m \cdot m'}{2 \cdot (r+h)}$, dado que a enerxía potencial é sempre negativa, a suma de ambas será 0. Este valor nulo da enerxía mecánica será cando ($r + h$) é ∞.

Tamén o podíamos razoar vendo cal é a velocidade do corpo para o caso de que a súa enerxía cinética coincide en valor absoluto coa enerxía potencial.

$$\left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{1}{2} \cdot m' \cdot v^2 \\ E_p = -\dfrac{G \cdot m \cdot m'}{(r+h)} \\ E_k = |E_p| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m' \cdot v^2 = \frac{G \cdot m \cdot m'}{(r+h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{(r+h)}}$$

Como a velocidade v do corpo é maior á velocidade de xiro necesaria para manterse nunha órbita circular, o corpo pode escapar ó infinito. No infinito é onde a enerxía mecánica é nula.

22. Un mesmo planeta, describindo circunferencias arredor do Sol, irá máis rápido: a) canto maior sexa o raio da órbita; b) canto menor sexa o raio da órbita; c) a velocidade non depende do tamaño da órbita.

SOL.: **b**

Para que un obxecto se atope en órbita: $F_g = F_c$: $G \cdot \dfrac{m_{\text{Sol}} \cdot m_{\text{planeta}}}{r^2} = m_{\text{planeta}} \cdot \dfrac{v^2}{r} \Longrightarrow$ Se r diminúe a forza gravitatoria aumenta, por ser esta inversamente proporcional a r^2; aumentando así a aceleración centrípeta a que está sometido e, polo tanto, a velocidade.

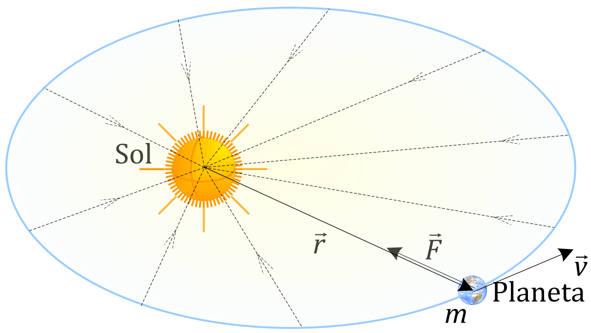
23. No movemento da Terra arredor do Sol: a) consérvanse o momento angular e o momento lineal; b) consérvanse o momento lineal e o momento da forza que os une; c) varía o momento lineal e consérvase o angular.

SOL.: **c**

O campo gravitatorio é un campo de forzas centrais, sendo unha das súas características que $\vec{F}$ e $\vec{r}$ son paralelos, o que supón que o momento da forza sexa nulo $\left(\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}\right)$ e, polo tanto:

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0} \rightarrow \vec{L}=\overrightarrow{\text{cte}}$: Isto representa o principio de conservación do momento angular. Nota: pode verse a cuestión 14.

Como L é constante: $r_1 \cdot v_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha_1 = r_2 \cdot v_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha_2$. Para o caso de que os puntos considerados sexan o afelio e o perihelio, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$ e, en consecuencia, $r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2$. Como $r_1 \neq r_2 \Rightarrow v_1 \neq v_2$: No caso de órbitas elípticas, cando a Terra está máis preto do Sol leva máis velocidade que cando está máis afastado del e $\vec{p}$ non permanece constante. E aínda que consideremos órbitas circulares, $\vec{p}$ tampouco é constante porque o vector velocidade $\vec{v}$ cambia continuamente de dirección.



24. Cando un obxecto xira en torno a Terra cúmprese: a) que a enerxía mecánica do obxecto na súa órbita é positiva; b) que a súa velocidade na órbita será $v = (2\, g\, r_T)^{½}$; c) que a forza centrípeta e a forza gravitatoria son iguais.

SOL.: **c**

A condición dinámica para a existencia dunha órbita implica a existencia dunha forza que garante a existencia dun movemento circular e polo tanto dunha aceleración centrípeta. A responsabilidade desta forza centrípeta recae no caso do campo gravitatorio na forza gravitatoria. Polo tanto a forza gravitatoria será a forza centrípeta.

25. A aceleración de caída dos corpos cara a Terra é: a) proporcional ó seu peso; b) proporcional á forza de atracción entre ambos; c) independente da súa masa.

SOL.:**c**

A aceleración de caída dos corpos "g" é a intensidade de campo gravitatorio e representa a forza exercida por unidade de masa, sendo independente da masa: $g = G\,(m/r^2)$.