PAU 2026
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

CRITERIOS

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

1.1. **0.75 puntos**, repartidos así:

- **0.25** puntos por chegar a P(45 <= X <= 70) = P(-0.26 <= Z <= 1.03),
- **0.25** puntos por chegar a P(Z <= 1.03) - P(Z < -0.26),
- **0.25** puntos por los cálculos finais.

1.2. **1.25 puntos**, repartidos así (se A é o suceso "estar na feira menos de 60 minutos" e B "estar na feira polo menos 45 minutos"):

- **0.25** puntos por saber que se pide P(A|B) e por saber que P(A|B) = P(A∩B)/P(B),
- **0.25** puntos por calcular P(B),
- **0.5** puntos por calcular $P(A \cap B)$.
- **0.25** puntos por dar o valor de P(A|B).

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1.

2.1.1. **1.25 puntos**, repartidos así:

- **0.25** puntos por calcular X,
- **0.25** puntos por calcular Y,
- **0.25** puntos por ver que X é invertible,
- **0.25** puntos por ver que Y non é invertible,
- **0.25** puntos por calcular a inversa de X.

2.1.2. **0.75 puntos**.

2.2. **2 puntos**, repartidos así:

- **0.5** puntos por resolver $\det(A) = 0$,
- **0.5** puntos polo caso $m \neq -2$.
- **1** punto polo caso $m = -2$ (0.5 polo estudo dos rangos e 0.5 pola conclusión).

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. **2 puntos**, repartidos así:

- **1** punto por chegar ás catro ecuacións.
- **1** punto por resolver o sistema.

3.2. **2 puntos**, repartidos así:

- **1** punto pola gráfica.
- **1** punto polas explicacións.

3.3. **2 puntos**, repartidos así:

- **1** punto polo debuxo.
- **1** punto polo cálculo da área.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1.

4.1.1. **1 punto**.

4.1.2. **1 punto**, repartido así:

- **0.5** puntos por comprobar que r é paralela a π^*.
- **0.5** puntos por calcular a distancia de r a π^*.

4.2.

4.2.1. **0.75 puntos**.

4.2.2. **1.25 puntos**, repartidos así:

- **0.5** puntos polo cálculo da recta que pasa por P e é perpendicular a π.
- **0.5** puntos por calcular o punto de corte da recta que pasa por P e é perpendicular a π co plano π.
- **0.25** puntos por calcular o punto simétrico pedido P''.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU
Convocatoria extraordinaria 2026
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

CONTEXTO
Os índices de lectura tanto de libros coma de cómics están aumentando nos últimos anos, con especial incidencia entre os adolescentes. Segundo un informe sobre hábitos de lectura, máis do 60 % da poboación leu un libro ou un cómic nos últimos tres meses.

Para promover o hábito da lectura, dentro da política cultural do concello, os responsables municipais dunha cidade galega están a organizar unha feira de cómics para o vindeiro mes de setembro. Segundo os datos proporcionados polos organizadores doutras feiras similares, o tempo que unha persoa vai pasar en dita feira pode considerarse que segue unha distribución normal de media igual a 50 minutos e desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estes dous apartados: 1.1. e 1.2.
(Será preciso usar algún ou algúns dos seguintes valores, aínda que non todos (enténdase que Z segue unha distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.1}) = 0.5398$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.26}) = 0.6026$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.51}) = 0.6950$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{1.03}) = 0.8485$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{1.28}) = 0.8997$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{2.33}) = 0.9901$.)

1.1. Calcule a probabilidade de que un asistente pase entre 45 e 70 minutos na feira.

1.2. Se unha persoa entrou á feira ás 17:00, calcule a probabilidade de que saia antes das 18:00 sabendo que ás 17:45 aínda estaba na feira.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pídese responder as seguintes cuestións:

2.1.1. Calcule as matrices $X = AA^T$ e $Y = A^TA$, sendo A^T a matriz trasposta de A. Son X ou Y invertibles? Razoe a resposta e calcule as inversas en caso de que sexa posible.

2.1.2. Calcule as matrices da forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado o polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule os coeficientes a, b, c e d se se sabe que p ten un extremo relativo en $(1, -6)$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de p en $x = -1$ é $y = 4x + 2$.

3.2. Debuxe a gráfica dunha función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que teña as seguintes propiedades:

- f, f' e f'' teñen o mesmo signo no intervalo $(-1,2)$ e
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Logo, dea explicacións relacionando o debuxo coa monotonía, a convexidade ou concavidade e o concepto de asíntota.

3.3. Dadas as funcións $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, debuxe a rexión encerrada polas súas gráficas e calcule a súa área.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Considere a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta r e ao punto $Q(2, -1, 1)$.
4.1.2. Comprobe que a recta r é paralela ao plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule a distancia de r a π^*.

4.2. Considere o punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule o punto P' simétrico de P con respecto ao punto $Q(2, -1, 2)$.
4.2.2. Calcule o punto P'' simétrico de P con respecto ao plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.1)} = 0.5398$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.26)} = 0.6026$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.51)} = 0.6950$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.03)} = 0.8485$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.28)} = 0.8997$, $\boldsymbol{P(Z \leq 2.33)} = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^TA$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a, b, c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1,2)$ y
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.
4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^*.

4.2. Considere el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.
4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

PREGUNTA 1

Sexa $X \sim N(50,19.5)$ a variable aleatoria que representa o tempo, en minutos, que unha persoa pasa na feira, e sexa

$$Z = \frac{X - 50}{19.5}$$

a variable tipificada, de xeito que $Z \sim N(0,1)$.

1.1.

$$\boldsymbol{P(45 \leq X \leq 70)} = P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z \leq \frac{20}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03)$$
$$= P(Z \leq 1.03) - P(Z < -0.26) = P(Z \leq 1.03) - 1 + P(Z \leq 0.26)$$
$$= 0.8485 - 1 + 0.6026 = \boldsymbol{0.4511}.$$

1.2. Chamemos A ao suceso «estar na feira menos de 60 minutos» e B ao suceso «estar na feira polo menos de 45 minutos». Pídese $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- $P(B) = P(X \geq 45) = P\left(Z \geq \frac{-5}{19.5}\right) = P(Z \geq -0.26) = P(Z \leq 0.26) = 0.6026.$
- $P(A \cap B) = P(45 \leq X < 60) = P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z < \frac{10}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z < 0.51) = P(Z < 0.51) - P(Z < -0.26) = P(Z < 0.51) - 1 + P(Z \leq 0.26) = 0.6950 - 1 + 0.6026 = 0.2976.$

Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{0.2976}{0.6026} = \boldsymbol{0.4939}.$$

PREGUNTA 2

2.1. Téñense

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1.

$$\boldsymbol{X} = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Y} = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

$\det X = 8 \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{X}$ **é invertible**.

$\det Y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{Y}$ **non é invertible**. (Ou ben, $\det Y = 0$ porque Y ten dúas filas iguais.)

A inversa de X é

$$\boldsymbol{X^{-1}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/4} \end{pmatrix}.$$

2.1.2. $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$BM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a+c=a \\ b=b \\ a+c=c \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c=0 \\ b \in \mathbb{R} \text{ calquera} \\ a=0 \end{Bmatrix}.$$

É dicir,

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \textbf{ con } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}.$$

2.2. Polo método de Gauss, podemos reducir o sistema dado a outro equivalente con matriz triangular, cuxa discusión é sinxela:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_2 - 2F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_3 - F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 0 & m+2 & m-10 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x & + & (m-2)y & + & 3z & = & 2, \\ & & 2y & + & mz & = & 5, \\ & & & & (m+2)z & = & m-10. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \neq -2$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m-10}{m+2}, \qquad y = \frac{5-mz}{2}, \qquad x = 2-(m-2)y-3z.$$

- Se $m = -2$, temos

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2, \\ 2y - 2z = 5, \\ 0 = -12, \end{cases}$$

que é claramente incompatible.

2.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right), \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 \\ 1 & m-2 & 3 \\ 0 & 2 & 2m+2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $2 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(A^*) \leq 3$ e $[\operatorname{rank}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0]$. Isto é certo para calquera valor de m.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2\begin{vmatrix} 2 & m+6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (2m+2)\begin{vmatrix} 2 & 2m-2 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} \\ &= -2(6-m-6) + (2m+2)(2m-4-2m+2) = 2m-4m-4 = -2m-4 \\ &= 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Polo tanto, o sistema é compatible determinado se $m \neq -2$.

Se $m = -2$, entón $\operatorname{rank}(A) = 2$ e

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{array}\right).$$

Posto que

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 2(-21+4) - (-28+18) = -34+10 = -24 \neq 0,$$

$\operatorname{rank}(A^*) = 3 \neq \operatorname{rank}(A) = 2$, e polo tanto o sistema é incompatible se $m = -2$.

PREGUNTA 3

3.1. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, co cal $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Das igualdades $\boldsymbol{p'(1) = 0}$ e $\boldsymbol{p(1) = -6}$, que se cumpren porque p ten un extremo relativo en $(1, -6)$, sácanse as dúas ecuacións seguintes:

$$3a + 2b + c = 0, \qquad (1)$$

$$a + b + c + d = -6, \qquad (2)$$

A pendente da recta $y = 4x + 2$ é 4, así que $\boldsymbol{p'(-1) = 4}$, é dicir,

$$3a - 2b + c = 4. \qquad (3)$$

Ademais, $y(-1) = -4 + 2 = \boldsymbol{-2 = p(-1)}$, de onde

$$-a + b - c + d = -2. \qquad (4)$$

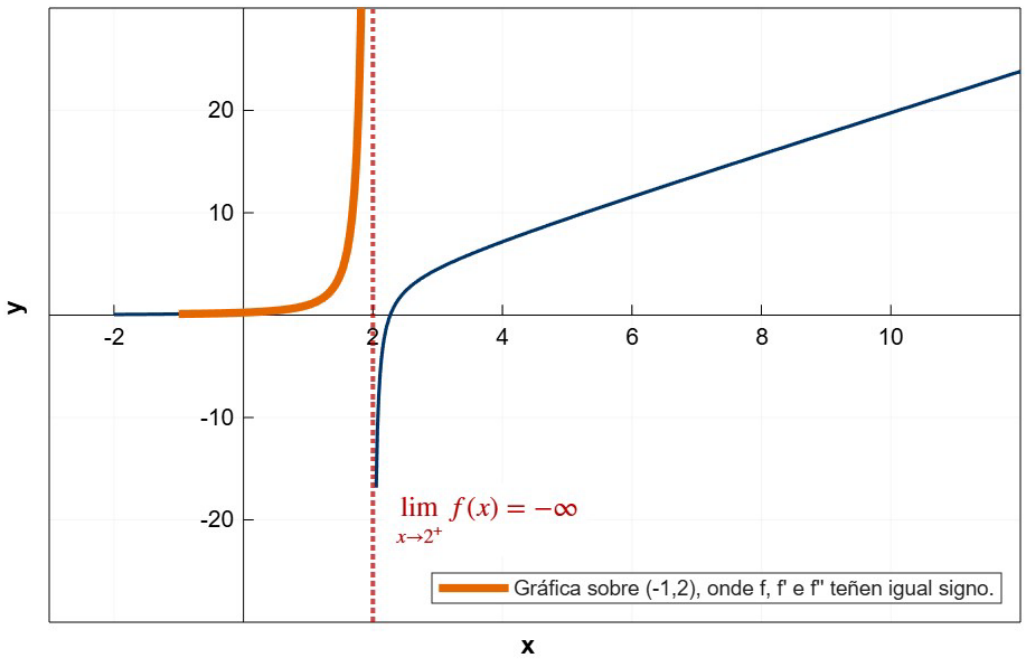
Facendo $(1) - (3)$ vemos que $4b = -4$, conque $\boldsymbol{b = -1}$.

Facendo agora $(2) + (4)$ chégase a $2b + 2d = -8$, é dicir, $b + d = -4$, de onde $\boldsymbol{d = -3}$.

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Longrightarrow 3a + c = 2\\ (2) \Longrightarrow a + c = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow 2a = 4 \Longrightarrow \boldsymbol{a = 2}.$$

Por último, $\boldsymbol{c = -2 - a = -4}$.

3.2. Vale, por exemplo,



No intervalo $(-1,2)$, f é positiva, f' é positiva porque f é crecente e f'' é positiva porque f é convexa.

Ao ser $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, a recta $x = 2$ é unha asíntota vertical.

3.3.

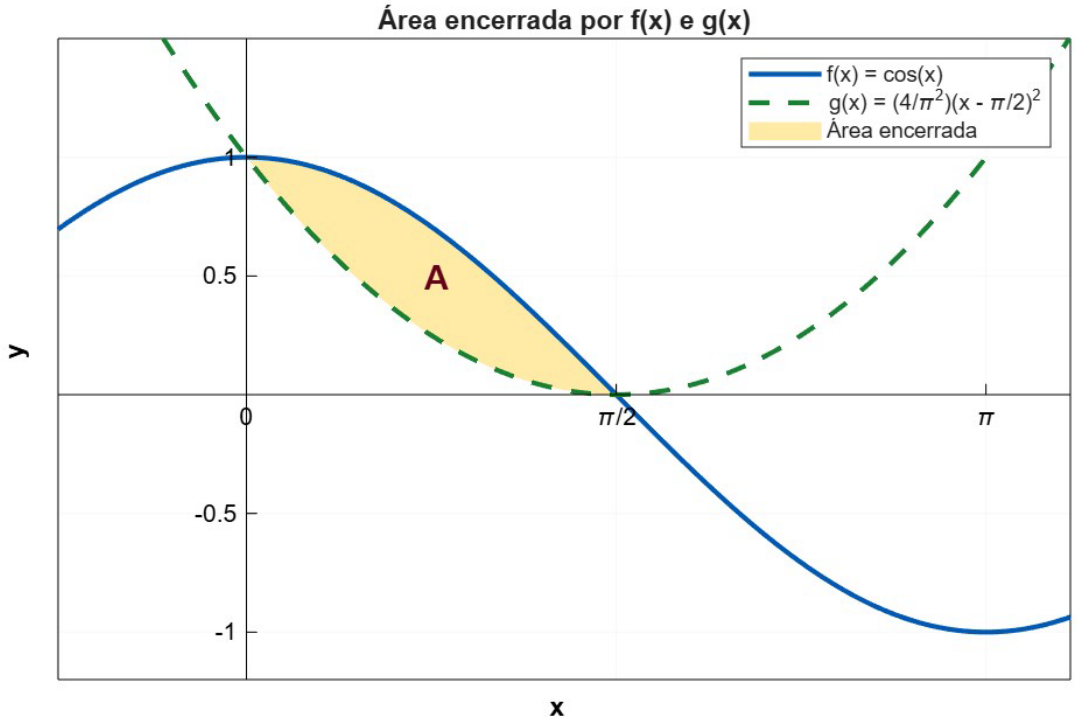
$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Obsérvese que $g(0) = 1 = f(0)$ e que $g(\pi/2) = 0 = f(\pi/2)$.

Por outra banda, como g é un polinomio de grao 2 con coeficiente principal positivo, a súa gráfica é unha parábola convexa. Ademais, o vértice atópase en $x = \pi/2$, porque

$$g'(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

(Podería engadirse que, ao ser $g(0) = g(\pi) = 1$ e estar os valores de f comprendidos entre -1 e 1, as gráficas das dúas funcións non se cortan en ningún outro punto á parte dos xa mencionados (ver debuxo).)



En consecuencia, a área pedida é:

$$A = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dx = \left[\sin x - \frac{4}{\pi^2}\frac{(x - \pi/2)^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) - \left(\sin(0) + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8}\right) = 1 - \frac{\pi}{6}\ \text{u}^2,$$

onde u indica unidade de lonxitude. Pode engadirse que

$$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0.4764.$$

PREGUNTA 4

4.1. Considérase a recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

4.1.1. Ecuación do plano π que contén a r e ao punto $Q(2,-1,1)$:

Posto que $P(1,1,0) \in r$, os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1,-2,1)$ e $\vec{v}_r = (2,1,3)$ son xeradores de π.

Entón, como

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6(x-1) + 2(y-1) + z + 4z - (x-1) - 3(y-1)$$

$$= -6x + 6 + 2y - 2 + 5z - x + 1 - 3y + 3 = -7x - y + 5z + 8,$$

a ecuación pedida é $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{-7x - y + 5z + 8 = 0}$.

4.1.2. $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_{\pi^*} = (2,1,3) \cdot (1,1,-1) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

o que demostra que o vector director de r, $\vec{v}_r$, e o vector normal ao plano π^*, $\vec{n}_{\pi^*}$, son perpendiculares, e polo tanto que **$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\pi}^*$ son paralelos**.

A distancia de r a π^* coincide coa distancia de $P(1,1,0)$ a π^*. Ao ser $\pi^*: Ax + By + Cz + D = 0$ con $A = 1, B = 1, C = -1$ e $D = -1$, e $P(x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ e $z_0 = 0$, tense

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\pi}^*) = \mathrm{d}(P, \pi^*) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},$$

ou, se se quere, $\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$.

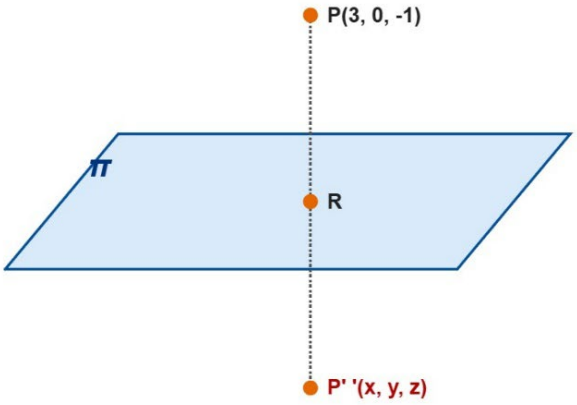
4.2.

4.2.1.



$$\left.\begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 2 \Longrightarrow 3 + x = 4 \Longrightarrow x = 1, \\ \dfrac{0+y}{2} = -1 \Longrightarrow y = -2, \\ \dfrac{-1+z}{2} = 2 \Longrightarrow -1 + z = 4 \Longrightarrow z = 5. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{P'(1,-2,5)} \text{ é o punto pedido.}$$

4.2.2.



$$\pi: x + 2y + z - 8 = 0.$$

Cálculo do punto R: este punto é a intersección do plano π coa recta r que pasa por $P(3,0,-1)$ e ten como vector director $\vec{n}_\pi = (1,2,1)$, é dicir,

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Posto que

$$\underbrace{(3+\lambda)}_{x} + 2\underbrace{(2\lambda)}_{y} + \underbrace{(-1+\lambda)}_{z} - 8 = 6\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

tense que $R(4,2,0)$.

Obtención do punto pedido P'':

$$\left.\begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 4 \Longrightarrow 3 + x = 8 \Longrightarrow x = 5, \\ \dfrac{0+y}{2} = 2 \Longrightarrow y = 4, \\ \dfrac{-1+z}{2} = 0 \Longrightarrow z = 1. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{P''(5,4,1)} \text{ é o punto pedido.}$$

NOTA FINAL: *as solucións que se presentan aquí son só propostas. É habitual que os problemas admitan varias formas de resolución, todas elas correctas e, polo tanto, igualmente válidas.*